This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

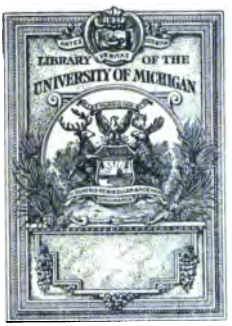
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

F. 1. 48 Kn.
12 —
F. 2. —



FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

QA
35
.K11an
1994

Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen.

10502
PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

Abgefasst

von

Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathem. Anfangsgr. IIIter Theil; 1ste Abtheil.

Dritte, stark vermehrte Auflage.

Göttingen,
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht
1794

C. D. H. Rau.
1810.

Vorrede.

Betrachtungen über das Verfahren, deſſen man ſich in der Algebra zu Erfindung der Wahrheit bedienet, würden hier ihre gehörige Stelle finden, wenn ich nicht diejenigen, welche meine Gedanken hierüber zu leſen verlangen, auf die Vorrede verweiſen müſſte, die ich Herrn Hubens **Verſuch einer analytiſchen Abhandlung von den Kegelſchnitten** (*) vorgeſetzt habe. Ich will alſo hier nur einige Geſetze anzeigen, die ich bey der Ausarbeitung gegenwärtiger Einleitung in die Algebra zu beobachten geſucht habe. Meine Hauptabſicht ging dahin, diejenigen, die ſich meines Unterrichts darinnen bedienen wollten, ſo vorzubereiten, daß ſie ihre Erkänntniß aus andern analytiſchen Schriften

(*) Göttingen 1759. bey Boſſiegeln.

ten ohne Anstoß zu erweitern im Stande wären. Die Menge von Begriffen und Regeln, die ich dieserwegen in einen engen Raum zusammen zu bringen suchte, verstattete nicht, jede Regel mit soviel Exempeln zu erläutern, als man in weitläuftigen Anleitungen zur Algebra nachlesen kann, wenn man hier gelernt hat, wie bey ihnen zu verfahren ist. Es wird genug seyn, daß bey jeder Regel soviel gesagt ist, als man zu ihrer Erläuterung fodern kann. Zugleich aber habe ich allezeit die Richtigkeit der Vorschriften der Algebra bündig darzuthun gesucht. Ob dieses von allen Schriftstellern ist beobachtet worden, will ich aus dem Ausdrucke beurtheilen lassen, dessen sich der Freyherr von Wolf bedient: "Reyneau habe Harriots Lehrsatz aus seiner Analyse demontrée weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen" (*). Ich kann nicht läugnen, daß mir dieser Ausdruck, den ich bey dem Anfange meines algebraischen Fleisses las, etwas anstössig vorkam; denn ich fand nur deßwegen an der Mathematik Gefallen, weil man alles in ihr demonstriren konnte, und ich hielt die Algebra für einen der

(*) Anfangsgr. der Alg. 316. §.

der ſchönſten Theile der Mathematik. Ich erfuhr aber wirklich, daß nicht alles in der Algebra wenigſtens völlig allgemein und mit allen Umſtänden demonſtrirt wird, was man dafür ausgiebt. Verſchiedene dergleichen Erinnerungen fand ich bey dem gewöhnlichen Vortrage der Lehre von den Gleichungen zu machen. Wenn man ihren Urſprung aus der Multiplication erklärt, ſo giebt man meines Erachtens den Grund nicht allemahl deutlich genug an, weßwegen man die Wurzelgleichungen auf 0 bringen muß; und wie einerley Buchſtabe zugleich verſchiedene Gröſſen bedeuten kann, welches ich 214. §. III; IV; Abſ. zu erläutern geſucht habe. Es fällt in die Augen, daß Wurzelgleichungen mit einander multiplicirt höhere geben; aber mir ſchien der umgekehrte Satz eines ſtrengern Beweiſes nöthig zu haben, daß es erlaubt iſt, jede Gleichung als ein Product aus Wurzelgleichungen anzuſehen (221. §.) der ſo wichtige Satz, daß die unmöglichen Wurzeln allemahl paarweiſe vorhanden ſind, führte mich auf umſtändlichere Betrachtungen über die unmöglichen Gröſſen und derſelben verſchiedene Arten, als man ſonſt anzuſtellen pflegt (228-272. §.), mit denen

aber zugleich verschiedene anderswo brauchbare Sätze (243; und 246. §.) verbunden sind. Bey den Regeln, die irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden (304. u. f. §.), habe ich gesucht vollständig darzuthun, so wohl wie man die ersten Näherungen findet, als auch wie man dieselben immer weiter fortsetzt. Ich habe ein gleiches mit der Auflösung der Gleichungen, welche zwo veränderliche Grössen enthalten, vermittelst des Newtonischen Parallelogrammes geleistet (632. und f. §.) wo ich glaube, die Beweise dieser so wichtigen Erfindung schärfer geführt zu haben, als ich sie in Schriften, die mir vorgekommen sind, angetroffen habe. Colson wenigstens, aus dem ich anfangs diese Methode allein habe kennen lernen, hat ihren Gebrauch zwar sehr deutlich und weitläuftig erklärt, aber von dem Beweise, weniger gesagt als ein gemeiner Rechenmeister bey den Regeln der Rechenkunst zu sagen pflegt, so daß mir das Vergnügen übrig blieb die Gründe von allen Vorschriften selbst aufzusuchen.

Man begnügt sich in der Algebra sehr oft allgemeine Gesetze anzunehmen, wenn man sich von der Richtigkeit derselben bey einigen besondern Fällen versichert hat. Eines

nes der bekanntesten Exempel ist wohl der binomische Lehrsatz. Ich hatte eben soviel Eifer die Regeln der Algebra zu demonstriren, als Reyneau kann gehabt haben, und in der That wäre es eine Schande für einen Deutschen, wenn er da nicht demonstriren wollte, wo selbst ein Franzose dieses unternimmt. Daher habe ich in solchen Fällen ordentlich das Verfahren gebraucht, dessen sich Jacob Bernoulli in der Arte Conjectandi beym Erweise des Hauptsatzes von den figurirten Zahlen bedient, das ich zuerst aus Hausens Elementis Arithmetices hatte kennen lernen. Die Beweise des binomischen Lehrsatzes (140) und des Gesetzes der Differenzen (724) sind Exempel davon.

Die anfangs angezeigte Absicht meines Lehrbuchs nöthigte mich von verschiedenen Dingen zu handeln, die man bisher eben nicht in den Anfangsgründen der Algebra angetroffen hat. Ich habe mich dabey vornehmlich der Schriften eines Gelehrten bedient, der mit gleicher Geschicklichkeit, sich zu Anfängern herabzulassen, und die grössten Meister zu lehren weiß. Weil ich hier Leser zum voraussetzen darf, die noch wenig Kenntniß von der höhern Mathematik ha-

ben, so ist mir erlaubt hinzuzusetzen, daß es Herr Euler ist.

Unter denjenigen Dingen, die allenfalls hätten wegbleiben können, will ich jedem nach seinem Geschmacke freystellen, ob er die Berechnungen der Wahrscheinlichkeit beym Lombre (742) oder der Modorum der Syllogismen (744) für entbehrlicher halten will. Ich glaube, es wäre eine Preisfrage, so wichtig als sie manchmahl von einigen französischen Akademien der schönen Wissenschaften pflegen aufgegeben zu werden, ob mehr Nachdenken nöthig gewesen ist, das Lombre, oder die Figuren und Modos zu erfinden. Mein Landsmann Christian Thomas, dessen Schicksal war durch seinen Witz Pedanten zu mißfallen, hat wenigstens in seinen Monatsgesprächen die Erfindung des Lombre dem Aristoteles zugeschrieben.

Den Beweis des Newtonischen Lehrsatzes (751) habe ich vor diesem in die **philosophischen Untersuchungen und Nachrichten** einrücken lassen, die der jetzige Kön. Dän. Herr Oberhofprediger Cramer zu Leipzig 1746. herauszugeben anfing; die Besorgung der letzten Stücke aber, soviel ich mich erinnere, wegen der Veränderung sei-

seines Aufenthaltes Herrn Mylius überließ. Mein Aufsatz nimmt daselbst die zweyte Stelle im sechsten Stücke ein. Man wird wohl nichts dabey zu erinnern finden, daß ich ihm einen gehörigen Platz hier eingeräumet habe, wie ich den Inhalt verschiedener von mir seit vielen Jahren herausgegebenen Abhandlungen in gegenwärtiges Werk gebracht habe. Vielleicht wäre es gut, wenn niemand ein Lehrbuch schriebe, der sich nicht erst an einzelnen Untersuchungen aus seiner Wissenschaft geprüft hätte, ob er in ihr etwas zu sagen wisse, das seine Vorgänger im Compendienschreiben nicht eben so gesagt haben.

Mit der Rechnung des Unendlichen, welche der zweyte Band gegenwärtiger Algebra werden soll, hoffe ich künftige Ostern diese Anfangsgründe der Mathematik zu schliessen. Der jetzige Band hätte, in so fern es auf mich ankam, schon an der letzten Leipziger Michaelismesse erscheinen können; Ich habe mich der Verzögerung, die mir wegen der Umstände meines Vaterlandes verstattet wurden, bedienet, noch einiges auszubessern und beyzufügen.

Göttingen im December 1759.

Erin-

Erinnerung

wegen der zweyten Auflage.

Man wird in diesen Anfangsgründen, keine beträchtlichen Vermehrungen bey einer neuen Ausgabe erwarten. Bey einigen Sätzen sind Beweise beygefügt worden, wo die Erfahrung mich gelehrt hatte, daß Anfänger solche für sich nicht entdeckten, wie 112. §. der Ursprung der Gleichungen aus der Multiplication 214. u. f. §. ist ohne Schaden der Deutlichkeit und Schärfe etwas kürzer vorgetragen worden, der Satz des 222. §. den die Algebraisten insgemein stillschweigend annehmen, ist gehörig bewiesen; im 272. §. ist genauer angegeben, was die vorhergehenden Sätze, von der Beschaffenheit und Menge der unmöglichen Wurzeln zuverlässig darthun, bey dem newtonischen Parallelogramm, sind theils nur Erläuterungen beygebracht, theils einige, welche am Ende voriger Ausgabe stunden, jezo an ihre gehörige Stelle gesetzt. Göttingen im Julius 1767.

Erin-

Erinnerung

bey der dritten Ausgabe.

Manches ist mehr erläutert worden, Anwendungen sind in grösserer Menge beygebracht, auch Bücher angeführt. Die Lehre von den krummen Linien hat besonders viel Zusätze bekommen, die Abhandlung von den Linien der zweyten Ordnung ist ganz umgearbeitet worden; Am Ende sind eine Menge einzelner Untersuchungen beygefügt. Was diese Ausgabe vor der zweyten eignes hat, ist in dem Verzeichnisse des Innhalts mit * bemerkt. Hie noch etwas über den Nahmen der Algebra.

Die erste Sylbe entdeckt seinen Ursprung aus dem Arabischen. Jakob Golius zeigt ihn umständlich in seinen Anmerkungen über den Alferganus an. Muhammedis fil.

Keti-

Ketiri, Ferganenſis, qui vulgo Alfraganus dicitur, elementa Aſtronomica, Arabice et Latine, cum notis ... opera Iacobi Golii; Amſtelod. 1669. Auf der 11. S. der Anmerkungen wird ein arabiſches Wort angeführt, deſſen lateiniſche Ueberſetzung iſt: os fractum repoſuit et conſolidavit, ſeu in integrum reſtituit. Weil nun Theile der Einheit in der Rechenkunſt, auch durch ein Wort angezeigt werden, das fractiones oder fragmenta bedeutet .... ſo ſagt Golius: Hinc et vulgatum illud nomen *Algebra* Analyſin Mathematicam notat, utpote cujus praecipuum munus ſit comparationis terminos reducere ad optatam aequationis formam, et ſpeciatim eorumdem partes ad integros redigere.

Veranlaſſung dieſe Etymologie beyzubringen, giebt dem Golius die arabiſche Einrichtung der Mondenjahre; ein Monat, welcher regelmäſſig nur 29 Tage hat, bekömmt im Schaltjahre 30 (Gatterer, Abriß der Chronologie 220. §.), wenn der Ueberſchuß der aſtronomiſchen Zeit mehr als einen halben Tag beträgt: Da wird alſo aus Brüchen, ein Ganzes gemacht.

Be-

Bekanntlich haben die Spanier noch sehr viel Wörter von den Mohren behalten, die sonst in Spanien herrschten. So heisst Algebrista, ein Mann der Beinbrüche und Verrenkungen heilt.

Als Don Quixote den Spiegelritter vom Pferde stieß, blieben des Gefallenen Rippen nicht völlig in ihrer Ordnung, und er mussţe sich an einem Orte aufhaltèn, wo ein solcher Arzt ihn wiederum zurechte brachte ... llegaron à un puèblo, donde fuè ventùra hallàr à un *Algebrista* con quièn se curò el Sanson desgraciàdo. Don Quixote Part. III. Lib. V. cap. XV; am Ende.

Algebra bedeutet also eigentlich nicht Analysis, nur Rechnung. Das analytische bey ihr kömmt darauf an: was man sucht, durch ein Zeichen anzudeuten, und mit diesem Zeichen so zu rechnen, wie man mit einer Zahl rechnen würde. Das Exempel beym 59. §. kann dieses erläutern; selbst wie Bruchrechnung angewandt wird.

Die gegebenen Zahlen wurden anfangs in ihren bestimmten Ausdrückungen beybehalten, Buchstabenrechnung (arithmetica specioſa) ist um 1590. von Franz Vieta eingeführt worden.

Die Algebra war noch bey den Rechnern des sechszehnden Jahrhunderts, eine Regel, oder eigentlich eine Sammlung von Regeln, wo nach Unterschiede der Potenzen, auch nach Mannichfaltigkeit der Zeichen + und — Fälle unterschieden wurden, die jezo der Gebrauch der Exponenten, der allgemeinen Coefficienten, und der entgegengesetzten Grössen, mehr auf einmahl darstelkt.

Sie ward fast nur auf arithmetische Räzel angewandt und brachte also weiter keinen Nutzen, als zufälliger Weise allerley Eigenschaften von Zahlen wahrzunehmen, wo nachgehends besonders die figurirten Zahlen einen Gebrauch zeigten, der sich weit erstreckte. Mit diesen arithmetischen Anwendungen der Coß, haben sich drey Deutsche viel Ruhm erworben: Christoph Rudolf, Michael Stiefel, Johann Faulhaber.

Die gesuchte Grösse, die wir etwa mit x bezeichnen, hieß bey den Italiänern cosa, Sache, des Deutschen rauhere Aussprache verdoppelte das s. Ihr Quadrat, Würfel u. s. w. hiessen Zensus, Cubus u. s. w. und bekamen eigne Nahmen und Zeichen,

chen, in deren Bildung und Zusammensetzung die Rechenmeister Proben der artis characteristicae gaben, die jezo alle unter die Antiquitäten gehören, seitdem man die Exponenten der Potenzen braucht. Ein nicht gar zu alter Rechenmeister, Marcus Martini stellt solche Zeichen, und das Gesetz ihrer Zusammensetzung in seinem Arithmetischen Wegweiser dar (Berlin 1741) 499. S. in der Abh. von Ausziehung der Wurzeln: Auch Marpurg in seinen Anfangsgründen des Progressionalcalculs giebt eigne Nahmen der ersten 36 Potenzen. Wer würde die Gedult haben, nur für die Potenzen eine eigne Sprache zu lernen? Peschek hat in seinem angehenden Algebraisten, Zittau 1744; die alten und neuen Bezeichnungen mit einander verglichen, auch unterschiedne Potenzen und figurirte Zahlen im: Arithmetischen und geometrischen Wurzelmanne, Zittau 1748. betrachtet. Das italiänische Cosa haben die Lateiner durch res gegeben; man s. im Buche 717. §. Der dort gebrauchte Pluralis, bezieht sich auf das Vielfache von x.

So viel ich weiß, machte Vieta den Anfang, was blos zu arithmetischen Be-

lustigungen gedienet hatte, auf ebene Geometrie, und Sehnen des Kreises anzuwenden, und Cartesius brauchte sie die Eigenschaften krummer Linien darzuthun. Dieses umständlicher auszuführen, überschritte hie meine Gränzen. Das meiste zur ältern Geschichte der Algebra gehörige findet sich in Io. Wallisii Tractatu Historico Practico de Algebra im Anfange des zweyten Bandes von seinen Operibus. Oxford 1693.

Göttingen, im Jänner 1794.

Kästner.

Inn-

Innhalt.

	Abs.	Seite
Ergänzung der Buchstabenrechnung, Division, Reihen u. s. w.	I.	1
Rechnung mit den Wurzelgrössen	18.	14
*Erläuterung bey Rechnungen mit unmöglichen Grössen	36.	21
Anwendungen der Buchstabenrechnung	37.	25
Reihen von Quadraten und Würfeln, und derselben Differenzen	39.	26
*Jede Potenzenreihe lässt sich durch Addiren finden, welches Faulhaber gelehrt hat	46.	31
Versetzungen	47.	33
*Wenn ein Ding mehr als einmahl vorkömmt	II.	34
*Anwendungen und Schriften davon	V. u. f.	35

Innhalt.

	Abs.	Seite
Man kömmt durch Halbirungen, auf Gröſſen, kleiner als jede gegebene	48. u. f.	40

Die Algebra.

Gleichungen;	51.	43
Coefficienten	57.	44
einfache Gleichungen	58.	44
beſtimmte Gleichung	70.	51
höhere	72.	51
reine, unreine	73.	52
Wurzel; auflöſen	74.	52
Quadratiſche Gleichungen	75. u. f.	52
*Analytiſche Regel	77.	53
Arithmetiſche Reihe	80.	57
Geometriſche	96.	63
Binomiſcher Lehrſatz für ganze, bejahte Exponenten	116.	70

Geometriſche Aufgaben.

Dreyeck im Kreiſe	153.	87
Zehneck	156.	88
*Analytiſche Bemerkungen, ſectio extrema et media ratione u. d. g.	II.	89
Achteck	160.	95

Sehne

Innhalt.

	Abs.	Seite
Sehne des Unterschiedes oder der Summe	163.	95
*Vielecke, die durch Elementargeometrie gegeben sind	173.	99
Sinus der vielfachen Winkel	175.	101
Unbestimmte Aufgaben	179.	104
*Rationale Trigonometrie	189.	112
*Regel Cöci u. d. g.	189.	115
Von den Gleichungen.		
Eine Gleichung rational zu machen, und zu ordnen	191. u. f.	116
Unbekannte Grössen wegzuschaffen	195. u. f.	119
*Schriften, welche Vortheile dabey lehren	209.	128
Mehr als bestimmt	213.	130
Quadratische Gleichungen aus Multiplication	214.	130
Höhere Gleichungen aus Multiplication	219.	139
Zahl der Wurzeln	223.	142
Gesetze der Coefficienten	224.	143
Gleichungen durch Division zu erniedrigen	226.	147
Ueber irrationale und unmögliche Wurzeln	228. u. f.	150
Mögliche Wurzeln reiner Gleichungen	237.	155

Innhalt.

	Th.	Seite
Divisionen einer um 1 verminderten Potenz u. d. g.	243.	158
Ausdrückungen unmöglicher Grössen	251.	163
Veränderungen mit der Gleichungen Wurzeln und Gliedern	273. u. f.	172
Zu finden ob eine Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat	294.	182
Gränzen der Wurzeln	301.	186
Die irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden	304.	187
Reihe, die aus einer Gleichung entsteht, und Differenzenreihen	308.	190
Zu entdecken, zwischen welche ganze Zahlen die Wurzeln fallen	317.	199
Näherung	321.	201
*Eine Gleichung kann rationale Wurzeln haben, die wir nur durch Näherung anzugeben wissen	XXX.	213
Von den krummen Linien	322.	213
Gerade Linie	340.	221
Parabel	349.	226
*Ableitung von Parabel und Parameter		226

*Or-

Innhalt.

	Abs.	Seite
*Ordinaten, Semiordinaten	353.	227
*Schenkel der Parabel; Sie werden immer mehr und mehr der Axe parallel. Ob sie eine Figur heissen kann	355. III. V.	228 229 230
Ellipse	362.	231
*Benennung, warum der Parameter kleiner genommen wird als die Axe	III.	232
Vergleichung der Ellipse mit der Parabel.		
*Parameter und Scheitel einer Ley	383.	239
*Scheitel und Brennpunct einer Ley	384.	241
Aehnliche Ellipsen	385.	243
*Ueber Aehnlichkeit bey geradelinichten Figuren und krummen Linien	388.	244
Affinität	389.	247
Hyperbel	389.	249
*Hyperbolae coniugatae	416.	260
Gleichseitige Hyperbel	417.	262
*Kreis, der sie in ihren beyden Scheiteln berührt		262
*Einiges Allgemeine über die drey krummen Linien	418.	262

Innhalt.

	Abs.	Seite
Von den Linien der zweyten Ordnung	419.	266
*Wieviel Glieder ihre Gleichung haben kann und muß		266
*Gerade Linie in dieser Gleichung enthalten	421. I.	268
*Wie die sechs Coefficienten auf fünf zu bringen sind	IV.	270
*Folge wenn beyder Coordinaten Quadrate da sind	VII.	271
*Wenn ohne die Quadrate nur das Product da ist	VIII.	271
*Allgemeine Auflösung der allgemeinen Gleichung	XIII.	274
*Für eine Abscisse, endliche und unendliche Ordinate	XIX.	275
Eine Gleichung in eine für andre Coordinaten zu verwandeln	422.	276
*Wegschaffung der gegebenen geraden Linien, die unendlich werden können	IX.	278
*Bey der Verwandlung nur eine gegebene gerade Linie zu brauchen	XXV.	281
*Wie die neue Gleichung aus der vorigen hergeleitet wird	423.	284
*Jede Gleichung ist vom zweyten Grade	424.	288

Keine

Innhalt.

	Abſ.	Seite
Keine Linie der zweyten Ordnung wird von einer geraden in mehr als zween Puncten geſchnitten	426. I.	289
*Entwickelung dieſes Satzes	II. u. f.	289
Eine Linie der zweyten Ordnung durch fünf Puncte; und Folgen daraus	427. u. f.	290
*Für jede Reihe paralleler Sehnen ein Durchmeſſer	431.	294
*Aus einer Gleichung, wo die Ordinaten ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie ſtehn, eine zu machen, wo die Ordinaten ſchief auf eben der Abſciſſenlinie ſtehn	436.	296
*Winkel des Durchmeſſers, mit	437.	298
Abſciſſenlinie, und Sehnen	439.	300
*Alle Durchmeſſer ſchneiden einander in einem Puncte	440.	300
*Welcher Punct auch ins Unendliche gehen kann	IX.	304
Mittelpunct	442.	304
*Winkel des zugehörigen Durchmeſſers mit der Abſciſſenlinie	444.	305
Tangente	449.	307
*Es giebt allemahl einen Durchmeſſer, der Sehnen ſenkrecht halbirt	463.	312

Jede

Innhalt.

	Abſ.	Seite
Jede Linie der zweyten Ordnung iſt Parabel, Hyperbel oder Ellipſe	464.	315
*Aus der Gleichung zu beurtheilen, welche es iſt	465.	315
Exempel andrer krummer Linien und allgemeine Lehren von ihnen.		
Algebraiſche, und deren Ordnungen	467.	321
Ciſſois	469.	322
*Aus zween gegebenen Puncten gerader Linien, an die krumme gezogene Summe oder Unterſchied gleich	475.	324
Muſchellinie	477.	327
Knoten	483.	329
Vielfache Puncte	489.	332
Schenkel	491.	335
Wie vielmahl eine krumme Linie von einer geraden kann geſchnitten werden	492.	337
Durch wieviel Puncte eine krumme Linie von gegebener Ordnung beſtimmt wird	495.	339
Geometriſche Oerter	497.	341
Conſtruction der Gleichungen	500.	342

Wie

Innhalt.

	Abſ.	Seite
Wie Flächen, welche Körper begränzen, durch Gleichungen angegeben werden	514.	353
Schnitte der Flächen	520.	355
Flächen, deren Gleichungen gleichartig ſind	529.	358
Runde Körper,	545.	365
***Sphäroiden, Konoiden.**		
Schnitte einer Fläche mit einer gegebenen Ebene	549.	368
Schnitte des gleichſeitigen Kegels	550.	369
*Vom ungleichſeitigen Kegel. Apollonius. Gleichung für den ungleichſ. Kegel	569.	380
Schnitte krummer Flächen mit einander; Linien von doppelter Krümmung	570.	385
Von tranſcendentiſchen krummen Linien.		
Tranſcendentiſche Function	571.	386
*Zu einem x können unzählich viel y gehören, darunter unmögliche	572.	387
Archimediſche Spirale	578.	390
Radlinie	600.	394
*Epikykloide. Hypokykloiden	611.	399

Zu

Innhalt.

	Abs.	Seite
Zu jeder Sehne, jedem Sinus unzählich viel Bogen	612.	401
	613.	403
Zwischen Bogen, und Sinus oder Sehne giebt es keine algebraische Gleichung	616.	404
Von unbestimmter Quadratur des Kreises	621.	405
*Quadratrix des Dinostratus	622.	406
Ausdrückung der Functionen durch unendliche Reihen.		
Jeder Coefficient der Reihe ist $=0$	624.	406
Quadratwurzel von $1+x$	625.	409
Potenz mit einem Exponenten, der ein bejahter Bruch ist	627.	411
Colsons endliche Reihe, wenn der Exponent verneint ist	IV.	415
Gestalt der Reihe	628.	416
Wenn man sie weiß, von zwo veränderlichen Grössen, eine durch die andre auszudrucken	631.	417
Das newtonische Parallelogram	632.	419
Umkehrung der Reihen	690.	476
Eine andre Art, die folgenden Glieder einer unendlichen Reihe zu finden	694.	478

Innhalt.

	Abs.	Seite
Cardans Regel	699.	487
Allgemeine Formeln der Differenzen und Summen	724.	504
Figurirte Zahlen	727.	516
Combinationen	735.	520
Anwendung auf Spiele	742.	526
*Wahrscheinlichkeitsrechnungen, politische Arithmetik u. d. g.	745.	528
Wenn eine Sache mehr als einmahl vorkömmt. Syllogismen	746.	532
*Gebrauch der Combinationen bey Coefficienten. Schriften darüber	748.	535
Lehrsatz von Triangularzahlen	750.	537
Verhalten der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln	751.	538
*Logarithmen von Summen, Differenzen und grossen Zahlen zu finden	752.	549
*Gebrauch der trigonometrischen Tafeln, Quadratwurzeln zu finden	753.	557
*Gebrauch der trigonometrischen Tafeln zu Auflösung quadratischer Gleichungen	754.	558
*Summe der Würfel einer gegebenen Menge von 1 nach eins		

	Abs.	Seite
einander folgenden ganzen Zahlen	755.	567
*Gang der Rechnung, die Summe der Potenzen, einerley unbestimmten Exponentens, einer unbestimmten Menge von 1 nach einander folgenden ganzen Zahlen zu finden	756.	569
Eine allgemeine Formel, kann in einem bestimmten Falle etwas Unrichtiges geben	756. XXVII.	576
*Zusammensetzung der Würfel aus ungeraden Zahlen	757.	576
Eine Gleichung kann Wurzeln haben, die nicht zur Frage gehören	757. V.	579

Aus Versehen sind bey manchem Paragraphen die Zahlen nicht so verändert worden, wie die eingeschobenen Vermehrungen erfodern.

So kömmt die Zahl 189. zweymahl vor, imgleichen 389.

Ergänzung
der
Buchstabenrechnung
zu
Arithmetik II. Capitel.

1. Erkl. Eine zusammengesetzte Grösse heisst, die aus verschiedenen mit + und − zusammengehängten Gliedern oder Theilen besteht.

2. Erkl. Eine solche Grösse wird nach einem gewissen in ihr befindlichen Buchstaben geordnet, wenn ihre Theile so nach einander folgen, wie in ihnen die Exponenten der Potenzen dieses Buchstabens wachsen oder abnehmen, das ist, die Glieder steigen oder fallen.

So ist $y^3 + ay^2 - bcy + abc$ nach y geordnet, und zwar so, daß die Potenzen abnehmen, oder daß das erste Glied die höchste Potenz hat, und die Glieder fallen, wenn man diesen Ausdruck von der linken gegen die rechte

Hand lieſet. Läſe man ihn umgekehrt, ſo machte die niedrigſte Potenz, deren Exponent = o iſt (Arithm. II. 11.) den Anfang, und die Glieder ſtiegen.

3. Zuſ. Wenn in der Reihe der Potenzen eine fehlt, ſo kann man ſich vorſtellen, ſie ſey in o multiplicirt, und ihre Stelle, wo es nöthig iſt, mit einem willkührlichen Zeichen, z. E. einem * ausfüllen. Wäre im Exempel (2) a = o; ſo hätte man $y^3 * - bcy *$.

4. Zuſ. Die Exponenten können auch gebrochene und verneinte Zahlen (Arithm. II. 9; 12;) ſeyn.

Ex. $z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{5}{2}} * - z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{3}{2}} =$

$z^3 \sqrt{z} + z^2 \sqrt{z} * - \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{z\sqrt{z}}$.

Die letztern werden für kleiner als poſitive angeſehen (Arithm. I. 95.), daher die Glieder ſteigen (2) wenn man von ihnen anfängt, oder fallen, wenn man mit ihnen aufhört.

5. Erkl. Die Zahlen oder Buchſtaben, welche in jedem Gliede (1) der geordneten Gröſſe (2) in die Potenz des Buchſtabens, nach dem man ſie geordnet hat, multiplicirt ſind, heiſſen Coefficienten, wie 1; a; — bc; abc; im Exempel (2).

6. Aufg. Zuſammengeſetzte Gröſſen mit einander zu dividiren.

Aufl. I. Man ordne den Diviſor und Dividendus nach einerley Buchſtaben, ſo daß in beyden

den die Glieder steigen oder fallen, nachdem sie im Quotienten steigen oder fallen sollen.

II. Man dividire des Dividendus erstes Glied, durch das erste Glied des Divisors nach Arithm. II. 6. dieses gibt des Quotienten erstes Glied.

III. Des Quotienten erstes Glied multiplicire man mit dem ganzen Divisor und ziehe das Product ab.

IV. Das Product aus dem ersten Gliede des Quotienten in des Divisors erstes Glied, wird beym Abzuge das erste Glied des Dividendus aufheben (II. und Arithm. I. 16.).

V. Die übrigen Glieder des abgezogenen Products, nebst den übrigen Gliedern des Dividendus, geben einen Rest, dessen erstes Glied dasjenige ist, das nach der Ordnung (I) zunächst nach des Dividendus erstem Gliede folgt.

VI. Dieses Restes erstes Glied dividire man durch des Divisors erstes Glied wie (II) so hat man des Quotienten zweytes Glied.

VII. Damit verfahre man wie mit dem ersten Gliede (III).

VIII. Das Product aus dem gefundenen Gliede des Quotienten in des Divisors erstes Glied, wird allemahl des Restes erstes Glied beym Abzuge aufheben wie in IV.

IX. Des abgezogenen Products (VII) übrige Glieder, nebst des vorigen Restes übrigen

Gliedern, geben einen neuen Rest, dessen erstes Glied dasjenige ist, das der Ordnung (I) gemäß zunächst nach des vorigen Restes erstem Gliede folgt.

X. Aus ihm wird wie in VI. das folgende Glied des Quotienten gefunden, und so nach VII; VIII; IX; fortgefahren.

XI. Der erste Rest giebt des Quotienten zweytes Glied, der zweyte das dritte, und so der mte das m+1te.

Exempel.

Quotient

$(x^3 - 2x^2 + 103.x - 2.103$

Divisor	Dividend
$x^2+2x-99$	$x^3 + 2.99x^2 - 103^2.x + 103.198$
	$x^3 + 2x^2 - 99x^2$
	$0 - 2x^2 + 99x^2 + 2.99x^2 - 103^2.x + 103.198$
	$-2x^2 - 4x^2 + 2.99x^2$
	$0 + 103x^2 - 103^2.x + 103.198$
	$+103x^2 + 2.103x - 99.103x$
	$0 - 2.103x - 4.103x + 103.198$
	$-2.103x - 4.103x + 103.198$
	$0 \quad 0 \quad 0$

7. Zus. Ist der Dividend kein Product aus dem Divisor in eine Grösse, die aus einer endlichen Menge von Gliedern besteht, so enthält der Quotient eine unendliche Menge von Gliedern.

Exem-

Exempel.

Divisor	Dividend	Quotient
$1 - x$	1	$1 + x + x^2 \ldots\ldots$
	$1 - x$	
	$* + x$	
	$+ x - x^2$	
	$* + x^2$	

Hier erhellet, daß der Quotient nach der Reihe alle Potenzen von x enthalten wird. Gesetzt, es sey der mte Rest x^m, so gibt dieser das $(m+1)$te Glied des Quotienten x^m, dessen Product in den Divisor ist $x^m - x^{m+1}$, welches von dem Reste abgezogen, $+ x^{m+1}$ zum $(m+1)$ten Reste, und also $+ x^{m+1}$ zu des Quotienten $(m+2)$ten Gliede giebt. Wenn also ein Rest positiv ist, und aus der Potenz von x besteht, deren Exponent seine Zahl nach (6; XI.) verstanden ist, so gibt er diese Potenz von x für das Glied des Quotienten, dessen Zahl eins mehr ist als die Zahl des Restes; und jeder folgender Rest ist auch positiv und besteht aus der Potenz von x deren Exponent von x seine Zahl ist, und gibt diese Potenz zum Gliede des Quotienten, dessen Zahl eins mehr ist als die Zahl des Restes.

Nun trifft dieses bey dem ersten Reste ein; Seine Zahl ist 1; er ist $+ x$ und gibt $+ x$ zum zweyten Gliede des Quotienten. Also trifft es auch bey dem zweyten Reste, und so bey allen folgenden ein.

Also ist der $(m+1)$te Rest überhaupt x^{m+1}, und wenn man die Division nicht ohne Ende fortsetzen, und doch den Quotienten vollständig haben will, so muß man ihn folgendergestalt ausdrücken:

$$1+x+x^2 \ldots\ldots + x^m + \frac{x^{m+1}}{1-x}.$$

8. Zus. Weil $\frac{a}{a-b} = \frac{1}{1-\frac{b}{a}}$ (Ar. 1; 66; 69; 85.) so gibt das Exempel (7) $\frac{b}{a}$ statt x gesetzt $\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} \ldots + \frac{b^m}{a^m} \ldots$ Man suche den Quotienten $\frac{10000}{9999}$ wo $a = 10000$; $b = 1$; also $x = 0{,}0001$ so wird derselbe $= 1 + 0{,}0001 + 0{,}00000001 + 0{,}000000000001$ u. s. w. wo also gleich die ersten Glieder des Quotienten ihn sehr genau geben.

9. Erkl. Eine Reihe (series) heißt eine Menge von Gröſſen, Gliedern, oder Theilen, deren jede nach einem gewissen allen gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt wird. Der Ausdruck, welcher dieses gemeinschaftliche Gesetz darstellt, heißt ein allgemeines Glied (terminus generalis).

So

So sind die Quotienten 7; 8; Reihen, weil jedes Glied eine Potenz ist, deren Exponent um eines weniger ist als die Zahl des Gliedes und $+ x^m$ ist ein allgemeines Glied der Reihe 7.

10. Erkl. Die Summe einer Reihe heisst, was herauskömmt, wenn man ihre Glieder, jedes mit seinem Zeichen, nachdem es + oder − hat genommen zusammen rechnet. Eben so versteht man die Summe einer gewissen Menge von Gliedern der Reihe.

11. Erkl. Wenn man der Summe der Reihe immer näher und näher kömmt, je mehr man von den ersten Gliedern findet und derselben Summe nimmt, so nähert sich die Reihe (convergit). Im entgegengesetzten Falle entfernt sie sich (divergit). Die Ergänzung (supplementum) die zu der Summe der ersten Glieder kommen muß, daraus die Summe der ganzen Reihe zu machen, wird in dem ersten Falle immer kleiner je mehr Glieder man nimmt, im andern immer grösser. Nimmt man die Ergänzung mit zu der Reihe, so findet man allemahl den richtigen Werth, die Reihe mag sich nähern oder entfernen. Aber man hat alsdenn von dem Gebrauche der Reihe keinen grossen Vortheil.

12. Zus. Damit sich die Reihe nähert, müssen die folgenden Glieder immer kleiner werden. Steigen sie also (2) so muß der Buchstabe, nach dem sie geordnet sind, in sofern die Näherung blos auf ihn und nicht auf die Coefficienten (5)

ankommen ſoll, einen eigentlichen Bruch bedeuten (Arithm. I. 76.) fallen ſie aber, ſo muß er eine ganze Zahl, je gröſſer deſto beſſer, bedeuten.

Im Exempel (7) nähert ſich die Reihe, und zwar ſehr ſchnell, wenn x ein kleiner Bruch iſt (8), ſollte ſich die Reihe nähern, wenn x eine groſſe Zahl iſt, ſo müſſte man dieſe Zahl zu des Diviſors erſten Theile machen. So wäre

Diviſor Divid. Quotient

$$x-1 \Big(1 \qquad \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots$$

$$1 - \frac{1}{x}$$

$$* + \frac{1}{x}$$

$$+ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$* + \frac{1}{x^2}$$

So fände man für $x = 10000$; $\frac{1}{9999} = 0{,}0001 + 0{,}000\,000\,01 + 0{,}000\,000\,000\,001$ u. ſ. w.

13. Zus. So findet man

Divisor	Divid.	Quotient
$1+x$	1	$1-x+x^2-x^3$
	$1+x$	
	$*-x$	
	$-x-x^2$	
	$*+x^2$	
	$+x^2-x^3$	
	$*\ -x^3$	

Hier erhellt, daß die Zeichen der Reste und der Glieder des Quotienten abwechseln. Es bedeute n eine ganze Zahl, und also 2n eine gerade Zahl, und man nehme an, ein Rest, dessen Zahl 2n ist, sey $+x^{2n}$ so gibt er eben das, für das $(2n+1)$te Glied des Quotienten, und dieses mit dem Divisor multiplicirt gibt $+x^{2n}+x^{2n+1}$ also ist nach geschehenen Abzuge der $(2n+1)$te Rest $=-x^{2n+1}$ und eben das ist auch das folgende $(2n+2)$te Glied, und dieses mit dem Divisor multiplicirt und das Product abgezogen gibt für den $(2n+2)$ten oder $2.(n+1)$ten Rest $+x^{2n+2}$ welches auch das $(2n+3)$te Glied ist. Ist also ein gewisser Rest, dessen Zahl gerade ist, positiv, und der Potenz von x gleich, deren Exponent diese gerade Zahl ist, so ist eben dieser Rest dem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl die nächstfolgende ungerade Zahl ist; Auch ist der nächste ungerade Rest negativ, und

der Potenz gleich, deren Exponent seine Zahl ist, und dem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl die nächst grössere gerade Zahl ist; und aus diesem Gliede des Quotienten folgt wieder ein positiver Rest, dessen Zahl gerade ist, und der der Potenz welche diese gerade Zahl zum Exponenten hat, gleichet, das ist, der eben so wie der zweyte vor ihm beschaffen seyn, und folglich eben so einen ungeraden Rest nach sich geben wird, wie der ungerade zunächst vor ihm war. Aber wenn man setzt $n = 1$ so ist der zweyte Rest positiv und der zweyten Potenz gleich, folglich der dritte negativ, und der dritten Potenz gleich; und der vierte wieder positiv und der vierten Potenz gleich, also der fünfte negativ und der fünften Potenz gleich u. s. f. auch ist jeder Rest einem Gliede des Quotienten gleich, dessen Zahl eins mehr ist als die Zahl des Restes, woraus das Gesetz der Glieder des Quotienten in Absicht auf die Zeichen und die Potenzen folgt.

14. Zus. Der Quotient ist also vollständig (wie in 7)

$$1 - x + x^2 \ldots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x} \quad (A)$$

oder,

$$1 - x + x^2 \ldots\ldots - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x} \quad (B)$$

In dem Falle (A) ist die Zahl der gefundenen Glieder des Quotienten ungerade; sein letztes Glied, das $(2n+1)$te wurde aus einem geraden

den positiven Reste gefunden; und der nächstfolgende ungerade Rest ist verneint, und gibt mit dem ganzen Divisor dividirt, und an die gefundenen Glieder gehenkt, wie in (7) die Ergänzung (11). Im Falle B wurde das letzte Glied, dessen Zahl gerade ist, aus einem ungeraden negativen Reste gefunden, und der nächstfolgende gerade ist positiv, und gibt mit dem ganzen Divisor dividirt die Ergänzung.

14. Zus. Man setze in (13); $x = 1$ so findet man

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1 \ldots + 1 - \frac{1}{2} \quad (A)$$

oder $$= 1-1+1-1 \ldots + 1-1+\frac{1}{2} \quad (B)$$

Jedes ungerade Glied hebt sich mit seinem nächstfolgenden geraden Gliede auf. Im ersten Falle bleibt also das letzte ungerade Glied 1 zu dem die Ergänzung $-\frac{1}{2}$ kömmt, mit ihm die Summe $\frac{1}{2}$ zu machen (11). Im zweyten Falle heben sich auf diese Art alle Glieder auf, und die Ergänzung macht für sich $\frac{1}{2}$.

15. Anm. Die Mathematikverständigen, welche auf diese Ergänzung nicht acht gegeben haben, haben in diesem Exempel Schwierigkeiten gefunden; denn wenn man bedenket, daß jedes ungerade Glied mit seinem nächstfolgenden o macht, und die Reihe unendlich annimmt, so scheint es, als wäre eine unendliche Reihe $o+o+o \ldots = \frac{1}{2}$. Leibnitz hat diese Schwierigkeit zu heben gesucht, Act. Erud. Suppl. T. V. p. 267. und Guido Grandi hat in dieser eingebildeten Wirkung des Unendlichen ein Gleichniß der Schöpfung aus Nichts zu finden geglaubt. Die Betrach-

trachtung der Ergänzungen vernichtet das ganze Geheimniß. Siehe meine Schrift de lege continui in natura Lipſ. 1750. und in meinen Diſſert. math. et phyſ. n. XIII.

16. Zuſ. Der Quotient $\frac{a}{a+b}$ iſt von $\frac{a}{a-b}$ (8) nur darinnen verſchieden, daß die gerade Glieder, das zweyte, vierte, u. ſ. w. verneint werden.

17. I. Eines Winkels φ, Secante ſey $= 1+x$ für den Halbmeſſer $= 1$. So iſt des Winkels Coſinus $= \frac{1}{1+x}$ (Trigon. 4. Erkl. 5. Zuſ.) der ſich alſo aus (13) leicht giebt wenn x klein iſt.

II. Ein gewöhnliches Exempel hiezu iſt: Wieviel man von einer gegebenen Höhe auf der Erdkugel überſehen kann. Wenn man den Halbmeſſer der Erde $= a$ ſetzt, die Höhe des Auges über die Oberfläche der Erde $= b$; und eine Tangente aus dem Auge an einen gröſſten Kreis der Erde, ſo iſt φ der Winkel, den Linien aus dem Mittelpunete der Erde an das Auge und an den Berührungspunct machen, zwiſchen ſie fällt der Bogen den das Auge überſieht.

In der Statik 21. Fig. iſt $KL = a$; $KG = a+b$; $LKG = \varphi$.

III. Bey Picard, traité du nivellement (Par. 1684.) findet ſich ein Abregé de la meſure de la terre. Da giebt er einen Grad $= 57069$ Toiſen

Toiſen = 342360 Fuß und den Halbmeſſer der Erde = 3269297 Toiſen = 19615782 Fuß das iſt hie = a.

IV. Ein Menſch ſey 5 Fuß hoch = b. Da ſollte eigentlich $\frac{b}{a}$ durch eine etwas mühſame Diviſion gefunden werden. Die erſpare ich mir durch Logarithmen weil der Quotient doch ſehr klein iſt, und in ſeinen kleinſten Theilen ihn genau zu ſuchen, hie, wie ſich bald zeigen wird, doch unnütz wäre.

$$\log 5 = 0,6989700$$
$$\log 19616000 = 7,2926105$$
$$\log \frac{b}{a} = 0,4063595 - 7$$

giebt $\frac{b}{a} = 0,000000255$.

Das Quadrat davon iſt kleiner als 9 hundert billiontheile, ändert alſo den Werth des geſuchten Coſinus in keinen Ziffern die in den gewöhnlichen trigonometriſchen Tafeln angegeben werden.

So nimmt man $\cos \varphi = 1 - \frac{b}{a} =$ 0,99999973 ... Dieſes auf den Sinustotus der Tafeln = zehn Millionen gebracht, giebt φ zwiſchen 2 und 3 Minuten, etwa 2,5 Minuten.

Nun beträgt 1 Minute 5706 Fuß alſo die Gröſſe des Bogens den das Auge überſieht

14265

14265 Fuß = ¼ geographische Meile, wenn dieser Meilen 15 auf einen Grad gerechnet werden.

Andere Auflösungen der Aufgabe: Wie weit man von einer Höhe sehen kann, und verwandter, finden sich bey der ersten Abtheilung meiner Anfangsgründe der angewandten Mathematik, in der ersten Zugabe.

Die Rechnung mit den Wurzelgrössen.

18. Erkl. Wenn aus einer Grösse eine Wurzel gezogen ist (Arithm. I. 47.) so nenne ich den ganzen Ausdruck zusammen eine **Wurzelgrösse**. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen, aus der nähmlich die Wurzel soll gezogen werden, kann selbst eine Potenz, und die Wurzelgrösse zusammen, eine **Irrationalzahl** (Arithm. IV. 42.) seyn, daher man dieses auch die **Rechnung mit den Irrationalzahlen** nennt.

19. Aufg. **Wenn bey verschiedenen Wurzelgrössen, die Wurzeln verschiedene Exponenten** (Arithm. I. 48.) **haben, Ausdrückungen zu finden, die eben diesen gegebenen Wurzelgrössen gleich sind, wo aber die Wurzeln einerley Exponenten haben, d. i. Wurzelgrössen auf einerley Benennung zu bringen.**

Aufl. Man drücke jede Wurzelgrösse als eine Potenz aus, deren Exponent ein Bruch ist, (Arithm. II. 9.). man bringe diese Brüche auf einer-

einerley Benennung (Arithm. I. 72.) so geben sie unter dieser Gestalt auch Exponenten von Potenzen ab, welche noch die vorigen Wurzelgrösse bedeuten; und man kann nach Arithm. II. 9. diese Potenzen rückwärts durch Wurzelgrösse ausdrücken.

Man soll $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[e]{y^c}$ auf eine Benennung bringen. Die erste Wurzelgrösse ist $= x^{\frac{n}{m}}$ und die zweyte $= y^{\frac{c}{e}}$ also auch die erste $x^{\frac{ne}{me}} = \sqrt[me]{x^{ne}}$ und die zweyte $= y^{\frac{mc}{me}} = \sqrt[me]{y^{mc}}$ wo der Wurzeln Exponenten einerley sind.

Soll man also $\sqrt[3]{7^2}$ und $\sqrt[5]{9^3}$ auf eine Benennung bringen, so setze man $m = 3$; $x = 7$; $n = 2$; $e = 2$; $y = 9$; $c = 5$; folglich $me = 6$; $ne = 4$; $mc = 15$ und verwandele also beyde Ausdrückungen in $\sqrt[6]{7^4}$; $\sqrt[6]{9^{15}}$.

20. Lehrs. Die Potenz eines Products (Arithm. I. 45.) ist ein Product aus den Potenzen der Factoren; oder $(ab)^m = a^m b^m$.

Bew. Denn $(ab)^m$ ist ein Product aus m Factoren, deren jeder $= ab$ ist; folglich ein Product aus m Factoren, deren jeder $= a$; in eben so viel, deren jeder $= b$; d. i. ein Product aus a^m in b^m.

21. Zus.

21. Zuſatz. Folglich iſt $\left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab$ (Arithm. II. 8.). Und daher $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ d. i. die Wurzel aus einem Producte iſt ein Product aus den Wurzeln ſeiner Factoren.

22. Zuſ. Eben ſo $\left(\frac{c}{e}\right)^m = \frac{c^m}{e^m}$ (Ar. I. 75.) und daher $\left(\frac{c^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}}\right)^n = \frac{c}{e}$ (Arithm. II. 8.) alſo $\sqrt[n]{\frac{c}{e}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{e}}$, das iſt, die Potenz oder die Wurzel eines Bruchs, iſt ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner Potenzen oder Wurzeln des Zählers und Nenners ſind.

23. Anm. Aus Arithm. I. 85. erhellt, daß die Buchſtaben hier auch Brüche und ſelbſt Irrationalzahlen bedeuten können.

24. Zuſ. $\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}$. Enthält alſo die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen einen Factor, der eine Potenz iſt, welche mit den Wurzelzeichen einerley Exponenten hat, ſo kann man die Wurzelgröſſe einfacher ausdrücken, (ad ſimpliciorem expreſſionem reducere) wenn man unter dem Wurzelzeichen nur den übrigen

gen Factor, der keine solche Potenz ist, läßt, und die Wurzel der Potenz als einen Factor vor das Wurzelzeichen schreibt.

So ist $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8} \cdot 7 = 2\sqrt[3]{7}$.

25. Zus. Wenn bey zwo Wurzelgrössen von einerley Benennung (19) nach diesem Verfahren einerley Zahlen unter dem Wurzelzeichen bleiben; so verhalten sich diese Wurzelgrössen wie die Zahlen vor den Wurzelzeichen, und haben also eine Rationalverhältniß (Arithm. V. 25.). Sie heissen quantitates communicantes.

$\sqrt{63} : \sqrt{28} = 3\sqrt{7} : 2\sqrt{7} = 3 : 2$.

26. Zus. Ein Product aus einer Rationalzahl in eine Wurzelgrösse, wird völlig in eine Wurzelgrösse verwandelt, wenn man die Rationalzahl vor dem Wurzelzeichen wegläßt, und die Potenz von ihr, die mit dem Wurzelzeichen einerley Exponenten hat, in die Grösse, die vorhin unter dem Wurzelzeichen stand, multiplicirt, d. i. wenn man das Verfahren von (24) rückwärts macht.

$10\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5000}$.

27. Aufg. Wurzelgrössen zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. Wenn sie wie (25) beschaffen sind, so multiplicirt man die Summe oder die Diffe-

reuz der Zahlen vor den Wurzelzeichen in die gemeinschaftliche Wurzelgröſſe. Auſerdem werden die Arbeiten nur angezeigt.

$$\sqrt{63} \pm \sqrt{28} = (3 \pm 2).\sqrt{7}.$$

28. Aufg. **Wurzelgröſſen mit einander zu multipliciren, wenn ſie einerley Benennung haben, oder dazu gebracht worden ſind (19).**

Aufl. Man multiplicire die Zahlen unter den Wurzelzeichen mit einander, vor das Product ſchreibe man das gemeinſchaftliche Wurzelzeichen, ſo hat man die Wurzelgröſſe, welche das Product der einzelnen Wurzelgröſſen iſt. Befänden ſich Zahlen vor den Wurzelzeichen der Factoren (25) ſo muß man auch das Product dieſer Zahlen in die Wurzelgröſſe multipliciren, welche das Product ausdrückt. Der Beweis erhellet aus (21)

$$a.\sqrt[m]{b}.c.\sqrt[n]{d} = a.\sqrt[mn]{b^n}.c.\sqrt[mn]{d^m} = ac.\sqrt[mn]{b^n d^m}$$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$ wie aus Arithm. II. 5. 3. Exemp. folgt.

29. Aufg. **Zwo einzelne Wurzelgröſſen von einerley Benennung mit einander zu dividiren.**

Aufl. Man dividire die Gröſſen unter den Wurzelzeichen, der Quotient, unter das Wurzelzeichen geſchrieben, gibt die Gröſſe, die aus der Diviſion herauskömmt. Befänden ſich vor den

Wur-

Wurzelzeichen des Divisors oder Dividendus Factoren, so wird ihr Quotient auch ein Factor des nur erwähnten Quotienten (22).

$$\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

30. Anm. Man kann hieraus die Regeln der Division für zusammengesetzte Wurzelgrössen vermöge (6) herleiten, wenn man sie nöthig hat.

31. Lehrs. Von einer verneinten Grösse sind alle Potenzen bejaht, deren Exponenten gerade sind, und alle verneint, deren Exponenten ungerade sind.

Bew. Sie sey $-e$ so ist $(-e)^2 = -e. -e = +e^2$ (Arithm. I. 105.) also $(-e)^3 = +e^2. -e = -e^3$ (Arithm. I. 103.) und $(-e)^4 = -e^3. -e = +e^4$ und $(-e)^5 = +e^4. -e = -e^5$ und so wechseln die Zeichen der Potenzen ab, weil jede mit der verneinten Wurzel multiplicirt, die nächst höhere gibt. Diese nächst höhere ist also verneint oder bejaht, nachdem die multiplicirte bejaht oder verneint war, und da also die erste Potenz, oder die Wurzel selbst verneint ist, so müssen alle geraden bejaht, alle ungeraden verneint seyn.

32. Zus. Die Wurzel eines ungeraden Exponenten hat einerley Zeichen mit ihrer Potenz; z. E. $\sqrt[3]{8} = +2$ und $\sqrt[3]{-8} = -2$; Aber eine Potenz eines geraden Exponenten hat zwo

gleiche und entgegengesetzte Wurzeln, $\sqrt{9}$ ist so wohl $+3$ als -3.

33. Zus. Wer eine Wurzel eines geraden Exponentens aus einer verneinten Grösse zu ziehen fodert, der fodert etwas unmögliches, denn es gibt keine verneinte Grösse, die eine solche Potenz wäre.

34. Erkl. Solche Wurzelgrössen (33) heissen unmögliche (imaginariae).

Zusatz. Der allgemeinste Ausdruck solcher Grössen ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, $\sqrt[2n]{-e} = (-e)^{\frac{1}{2n}}$ (Arithm. II. 9.) $= [(-e)^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{2}}$ (Ar. II. 8.) $= \sqrt[n]{(-e)^{\frac{1}{n}}}$ (Ar. II. 9.) $= \sqrt[n]{(\sqrt{-e})}$. Hier ist aus (31) $\sqrt{-e}$ eine mögliche verneinte Grösse, wenn n ungerade, aber eine unmögliche Grösse, wenn n gerade ist (33). Man kann also alle solche unmögliche Grössen wie (34) als Quadratwurzeln ansehen, die entweder aus möglichen verneinten Grössen, oder aus unmöglichen gezogen werden sollen.

35. Zus. Wenn die unmögliche Grösse eine Quadratwurzel aus einer möglichen verneinten Grösse ist, welcher Fall am häufigsten vorkömmt, so ist ihr Quadrat diese verneinte Grösse. Soll also dieses Quadrat durch die Multiplication der unmöglichen Grösse mit sich selbst nach (28) gefunden werden, so muß man die negative Wurzel nach (32) nehmen. $(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{-a}.$

$\sqrt{-a}$

$\sqrt{-a}$ gibt nach (28) $\sqrt{+a^2}$ d. i. $+a$ oder $-a$ (32) da man also hier $-a$ nehmen muß.

36. I. Der Umstand daß jede Quadratwurzel bejaht oder verneint seyn kann, verbunden mit (35) giebt allerley Folgerungen, die dem Rechner welcher diese ersten Begriffe nicht deutlich aus einander gesetzt, sehr unerwartet kommen.

II. $(1+\sqrt{-b}).(1-\sqrt{-b}) = 1+b$ (Aus 35; auch Arithm. II. Cap. 5. §.).

III. Es sey

$\sqrt{(1+\sqrt{-b})} + \sqrt{(1-\sqrt{-b})} = q$ oder der Kürze wegen $P+Q=q$.

IV. Folglich $P^2 + 2.P.Q + Q^2 = q^2$ das ist $2+2\sqrt{(1+b)} = q^2$ (II).

V. Weil man die Wurzelgröße in (IV) mit dem Zeichen $-$ nehmen kann, so ist auch

$$2-2\sqrt{(1+b)} = q^2.$$

VI. Dieser Werth (V) ist verneint, weil b eine bejahte Größe bedeutet. Also giebt die Gleichung (V) $\pm\sqrt{(2-2\sqrt{(1+b)})} = q$ zweene unmögliche Werthe von q, deren jeder eine Quadratwurzel aus einer verneinten Größe ist.

VII. Aber die Gleichung (IV) giebt $\pm\sqrt{(2+2\sqrt{(1+b)})} = q$ zweene mögliche Werthe für q, entgegengesetzte, sonst gleiche.

VIII. Die Gleichung III, scheint doch wohl jedem der diese vorläufige Kenntniß nicht hat, ein einziges q anzugeben, und er wird geneigt

seyn, dasselbe für unmöglich zu halten, weil beyde Theile unmöglich sind.

IX. Wegen des letztern könnte ihm wohl einfallen: daß ein Paar Gröſſen deren jede aus einem möglichen, und einem unmöglichen Theile besteht, zusammen eine mögliche Summe machen wenn das Unmögliche sich aufhebt; z. E. $7+\sqrt{-5}+7-\sqrt{-5}=14$. Ob so was, in III, statt findet müsste also untersucht werden.

X. Wegen des ersten müsste er sich daran erinnern daß jede Quadratwurzel zweene Werthe hat. Das giebt also für P folgendes $\pm\sqrt{(1+\sqrt{-b})}$ oder $\pm\sqrt{(1-\sqrt{-b})}$ und so für Q.

Es sind also unter den vier Werthen von P, zweene mit zween unter den vieren von Q einerley, und umgekehrt, oder: die vier Werthe von P, sind einerley mit den vier Werthen von Q. $P+Q$ bedeutet aber einen Werth von P und einen von Q der mit dem von P nicht einerley ist, zusammen genommen.

XI. Solchergestalt hat q folgende vier Werthe

$$+\sqrt{(1+\sqrt{-b})}+\sqrt{(1-\sqrt{-b})}$$
$$-\sqrt{(1+\sqrt{-b})}-\sqrt{(1-\sqrt{-b})}$$
$$+\sqrt{(1-\sqrt{-b})}-\sqrt{(1+\sqrt{-b})}$$
$$-\sqrt{(1-\sqrt{-b})}+\sqrt{(1+\sqrt{-b})}$$

Von diesen vier Werthen, sind die ersten beyden entgegengesetzt, sonst gleich, eben so die letzten beyden.

XII.

XII. Jedes der erſten beyden Werthe Quadrat iſt =

$$1 + \sqrt{-b} + 2.\sqrt{(1+b)}$$
$$+1 - \sqrt{-b}$$

alſo möglich, und bejaht.

Jedes der letzten beyden Werthe Quadrat iſt

$$1 - \sqrt{-b} - 2\sqrt{(1+b)}$$
$$+1 + \sqrt{-b}$$

alſo möglich, aber verneint.

Da nun aber eines verneinten Quadrates Wurzel unmöglich iſt ... eigentlich, das Verneinte kein Quadrat einer möglichen Gröſſe iſt ... ſo heiſſt dieſes ſoviel:

XIII. Jeder der beyden erſten Werthe von q, hat eine bejahte Gröſſe zum Quadrate, iſt alſo möglich.

Jeder der beyden letzten Werthe, hat eine verneinte Gröſſe zum Quadrate, iſt alſo unmöglich.

XIV. Die beyden erſten Werthe ſind in der Gleichung (IV) enthalten, die beyden letzten in der Gleichung (V).

XV. Wenn eine Zahl nicht das Doppelte eines Quadrats iſt, ſo iſt die Quadratwurzel aus ihrem Doppelten, irrational.

Nähmlich $\sqrt{2.a}$ kann nicht anders rational ſeyn als wenn $a = 2.c^2$.

XVI. Will man alſo den Werth von q in (IV) rational haben ſo ſetze man

$$1 + \sqrt{(1+b)} = 2.c^2;$$

daher, $\sqrt{(1+b)} = 2.c^2 - 1$; nun quadrirt, und was ſich aufhebt weggelaſſen, $b = 4.c^2.(c^2-1)$ da kann man c nach Gefallen annehmen, und hat $q = \pm 2.c$.

XVII. Exemp. Man nehme $c = 3$, kömmt $b = 36.8 = 288$; $1 + b = 289 = 17.17$. Aus $\sqrt{(1+\sqrt{-288})} + \sqrt{(1-\sqrt{-288})} = q$ erhält man alſo in (IV) $2 + 2.17 = q^2$ alſo $q = \pm 6$.

XVIII. Zur Unterſuchung von (III) veranlaſſte mich ein Brief von Leibnitzen an Oldenburgen; 1676. geſchrieben. Er findet ſich in Walliſii Opera Tom. III. Oxf. 1699. in der Sammlung Epiſtolarum collectio, wo er der 7. iſt, 689 u. f. S. Auf der 692 S. erinnert Leibniz es ſey vergebens, daß man ſich beſtrebe, die unmöglichen Gröſſen wegzuſchaffen, die ſich in den Ausdrückungen möglicher Wurzeln befinden, ſie ſchaden auch der Rechnung und der Gleichung nichts; et verae realesque ſunt quantitates ſi inter ſe conjungantur, ob deſtructiones virtuales. Quod multis elegantibus exemplis et argumentis deprehendi. E. g. $\sqrt{(1+\sqrt{-3})} + \sqrt{(1-\sqrt{-3})} = \sqrt{6}$. Tametſi enim, neque ex binomio $\sqrt{(1+\sqrt{-3})}$, neque ex binomio $\sqrt{(1-\sqrt{-3})}$ radix extrahetur, nec proinde ſic deſtruetur imaginaria $\sqrt{-3}$, ſuppoponenda tamen eſt deſtructa eſſe virtualiter, quod actu appareret, ſi fieri poſſet extractio. Alia tamen via haec ſumma reperitur eſſe $\sqrt{6}$.

XIX.

XIX. Den Weg zeigt Leibniz nicht an, und so wird vorstehender Commentarius über diese Stelle, auf mehr als eine Art nützlich seyn.

XX. Aus (IV) folgt $2.\sqrt{(1+b)} = q^2 - 2$ und dieses quadrirt giebt $4b = q^4 - 4.q^2$ oder $q^4 = 4.q^2 + 4.b$. Das giebt (nach unten 78.) $q^2 = 2 \pm 2\sqrt{(1+b)}$; Also für das Quadrat von q zweene Werthe einen bejahten und einen verneinten. Die Quadratwurzel aus jedem dieser Werthe, kann bejaht oder verneint genommen werden, also giebt des Quadrats bejahter Werth, zwey mögliche q; entgegengesetzte sonst gleiche, des Quadrats verneinter Werth eben so zweene unmögliche.

So dient dieses Exempel die Gleichungen zu erläutern. In denselben sind die mannichfaltigen Werthe einer Größe mit einander verwickelt; Ist die Auflösung der Gleichung thunlich, so werden dadurch die Werthe einzeln dargestellt.

Einige Anwendungen der Buchstabenrechnung.

37. Aufg. Die Eigenschaften der Summen, Producte, u. s. w. gerader und ungerader Zahlen zu finden.

Aufl. Wenn n, m, ganze Zahlen bedeuten, so lässt sich jede gerade Zahl durch 2n oder 2m; jede ungerade durch $2n - 1$; $2m + 1$ ausdrücken. So erhellt gleich, daß die Summe einer geraden und ungeraden Zahl oder $2m + 2n - 1$

ungerade; die Summe zwoer ungeraden $2m+1+2n-1=2m+2n$ gerade ist. Mit den Unterschieden verhält es sich auch so. Das Product einer ungeraden durch eine gerade, muß gerade seyn, denn der gerade Factor, und folglich das ganze Product läßt sich mit 2 dividiren. Aber zwo ungerade $(2m+1).(2n-1)$ geben $2n.(2m+1)-2m-1$ ungerade; u. s. w. Der ganze Kunstgriff bestehet in einer geschickten Bezeichnung beyder Arten von Zahlen.

38. Zus. Wenn die erste ungerade Zahl $=1$; so ist die zweyte $3=1+2.1$ die dritte $5=1+2.2$; die vierte $7=1+3.2$ und so die $m+1$te $=2m+1$; oder auch $2m+2-1=2.(m+1)-1$.

39. Aufg. **Den Unterschied zweyer Quadrate zu finden, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind.**

Aufl. Wenn die Wurzeln n; $n+1$; heißen, so sind die Quadrate n^2; und n^2+2n+1; also ist ihr Unterschied $2n+1$; die $n+1$te ungerade Zahl.

40. Zus. Sind die Wurzeln n, nach der Reihe die natürlichen Zahlen 0; 1; 2; 3; u. s. w so ist für $n=0$; $n+1=1$; der Ueberschuß des Quadrates von 1, über das von 0, die erste ungerade Zahl; für $n=1$; $n+1=2$; der Ueberschuß des Quadrates von 2 über das von 1 die zweyte ungerade Zahl; für $n=2$; $n+1=3$; der Ueberschuß des Quadrates der 3 über

das

das von der 2 die dritte ungerade Zahl, u. s. w. Addirt man also die erste ungerade Zahl zu der zweyten, so hat man das Quadrat der 2; addirt man dazu die dritte, so hat man das Quadrat der 3 und so ist jedes Quadrat die Summe so vieler ungeraden Zahlen, als seine Wurzel Einheiten hat.

41. Zus. Jedes Quadrat läßt sich durch n^2 ausdrücken; dieses ist also ein allgemeines Glied in der Reihe der Quadrate (9), und drücket das n te Quadrat aus, wenn 1 das erste ist; das nächstfolgende $(n+1)$te Quadrat wird erhalten, wenn man in das allgemeine Glied $n+1$ statt n setzt. Dieses ist ein Beyspiel, wie man das allgemeine Glied einer Reihe brauchen kann, jedes Glied, oder auch allgemein, jede zwey nächstfolgende, zu finden.

42. Zus. Das nte Quadrat vom nächstfolgenden $(n+1)$ten abgezogen gibt einen Unterschied, und diese Unterschiede machen wieder eine Reihe, deren allgemeines Glied $2n+1$ ist (39). Nimmt man also 1 für das erste Quadrat an, so gibt $4-1=3$ in dieser Reihe der Unterschiede das erste Glied, welches man erhält, wenn in dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes $n=1$ gesetzt wird. So gibt $n=2$, das zweyte Glied 5 dieser Reihe der Unterschiede, u. s. w. daß $2n+1$ überhaupt das nte Glied bedeutet. Nähmlich $n+1$ Glieder in der Reihe der Quadrate, geben n Glieder in der Reihe der Unterschiede. Wenn man also in dem allgemeinen Gliede der

Reihe

Reihe der Unterschiede, $n+1$ statt n setzt, so bekömmt man dieser Reihe $(n+1)$tes Glied, $= 2n+3$; und der Unterschied dieser beyden nächst nach einander folgenden Unterschiede, ist ein allgemeines Glied einer Reihe die herauskömmt, wenn man jeden Unterschied in der ersten Reihe der Unterschiede von seinem nächstfolgenden abzieht, das ist, ein Glied einer zweyten Reihe, von Unterschieden. Es ist aber $= 2$ daß also diese zweyte Reihe für jedes Glied 2 bekömmt, wie gleich daraus leichter erhellt, daß die ersten Unterschiede ungerade Zahlen sind. Meine Absicht war nur hiedurch den Gebrauch des allgemeinen Gliedes zu erläutern.

Zweyte Unterschiede	Erste Unterschiede	Quadrate	Wurzeln
		+ 25	− 5
	− 9	+ 16	− 4
+ 2	− 7	+ 9	− 3
+ 2	− 5	+ 4	− 2
+ 2	− 3	+ 1	− 1
+ 2	− 1	0	0
+ 2	+ 1	+ 1	+ 1
+ 2	+ 3	+ 4	+ 2
+ 2	+ 5	+ 9	+ 3
+ 2	+ 7	+ 16	+ 4
+ 2	+ 9	+ 25	+ 5

In der Tafel sind die Reihen auch für negative Wurzeln angezeigt, da sie hinaufwärts wie hinunterwärts ohne Ende gehen. Man kann also nach Gefallen in der Reihe der Quadrate, welches Glied man will, für das erste nehmen; nimmt man wie in (42) das Quadrat von + 1 für das erste Glied der Reihe der Quadrate, das von + 2 für das zweyte, das von + 3 für das dritte u. s. f. an, so wird das Quadrat von 0, das 0te Glied, das Quadrat von — 1 das — 1 Glied, das Quadrat von — 2 das — 2 Glied u. s. w. wenn nähmlich die Zahl, die anzeigt, das wievielte Glied eines ist, verneint wird, so bedeutet solches, daß dieses Glied, vom Anfange der Reihe, von dem willkührlich angenommenen ersten Gliede rückwärts liegt.

43. In diesem Falle sind + 3; + 5; + 7; u. s. w. das erste, zweyte, dritte, u. s. w. Glied in der Reihe der Unterschiede, also sind in dieser Reihe + 1; — 1; — 3; — 5; das 0te; das — 1te; das — 2te, das — 3te u. s. w. Glied. Man bekömmt auch wirklich diese Zahlen, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke des nten Gliedes der Reihe der Unterschiede (42) nach und nach $n = 0; -1; -2; -3;$ setzt. Z. E. für $n = -3$ wird er $-3 \cdot 2 + 2 = -5$.

44. Zus. Alle Quadrate, nach der Reihe, ohne Multiplication zu finden, darf man nur die ungeraden Zahlen nach der Reihe addiren (40) und wenn man zu einem Quadrate seine doppelte

Wur-

Würzel und noch 1 addirt, so hat man das nächstfolgende (42). Z. E. Es sey $n = 1000$, so ist $1001^2 = 1000^2 + 2.1000 + 1 = 1002001$; Nun sey $n = 1001$ so ist $1002^2 = 1001^2 + 2.1001 + 1 = 1004004$ u. s. w.

45. Aufg. **Den Unterschied der Cubikzahlen von m und von $m+1$ zu finden.**

Aufl. I. Weil $(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ (Arithm. IV. 28.) so ist er $3m^2 + 3m + 1$.

II. In diesem allgemeinen Gliede der Reihe der ersten Unterschiede, setze man $m+1$ statt m, so hat man das nächstfolgende $3.(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 = 3m^2 + 9m + 7$ und jenes von diesen abgezogen gibt $6m + 6$ für ein allgemeines Glied der Reihe der zweyten Unterschiede.

III. In diesem setze man wieder $m+1$ statt m, sein nächstfolgendes $6(m+1) + 6 = 6m + 12$ zu erhalten, davon das nächstvorhergehende abgezogen das allgemeine Glied der dritten Reihe der Unterschiede gibt, das also durchgängig $= 6$ ist.

IV. Vier nach einander folgende Würfel, geben drey erste Differenzen, daraus findet man zwo zweyte und aus diesen beyden eine dritte, welche allemahl 6 ist, addirt man also 6 zu der untersten zweyten Differenz, so hat man eine neue zweyte, welche zu der untersten ersten addirt eine neue erste gibt, und diese zu dem untersten Würfel addirt, gibt einen neuen

Würfel.

Würfel. So seyen die vier Würfel 1; 8; 27; 64; die drey ersten Unterschiede 7; 19; 37; die beyden zweyten 12; 18; der dritte unveränderliche 6 man findet alsdenn 18 + 6 = 24; 37 + 24 = 61; 64 + 61 = 125; Nimmt man nun für die vier Würfel; 8; 27; 64; 125; an, deren erste Unterschiede, 19; 37; 61; die zweyten 18; 24; sind, so ist 24 + 6 = 30; 61 + 30 = 91; 125 + 91 = 216 und so kann man alle Würfel nach der Reihe durch die Addition finden.

III. Unt.	II. Unt.	I. Unt.	Würfel	Wurzeln
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
	30	91	216	6
	36	127	343	7
	42	169	512	8

Man kann diese Reihen wie bey dem Quadrate hinaufwärts fortsetzen, wo die Würfel verneint werden.

Anm. Nach 44; 45; lassen sich Quadrat- und Cubiktafeln verfertigen, und die verfertigten prüfen (Arithm. IV. 44.).

46. Anm. I. Wenn so statt der Wurzeln die natürlichen Zahlen nach der Ordnung genommen werden, so hat die Reihe vierter Potenzen vier Unterschiede, deren letzter beständiger = 4.3.2.1 = 24

= 24 ist; und der fünfte Unterschied der fünften Potenzen ist 5. 4. 3. 2. 1 = 120.

II. Allgemein, hat die Reihe der Potenz m von allen ganzen Zahlen, so viel Unterschiede, als der Exponent Einheiten hat; der letzte ist ein Product aus allen ganzen Zahlen m. (m — 1). (m — 2) . . . . 1.

III. Hat man also von der Reihe x^m wo x jede ganze Zahl bedeuter, soviel Glieder, daß man daraus den 1; 2; 3; . . . (m — 1)ten Unterschied berechnen kann, so findet man durch Addirung des unveränderlichen mten Unterschiedes zum (m — 1)ten, das folgende Glied der (m — 1)ten Differenzenreihe, und dieses zum Gliede der (m — 2)ten Differenzenreihe addirt, giebt dieser folgendes, und so findet man immer folgende Glieder vorhergehender Differenzenreihen, bis das folgende Glied der ersten Reihe, zum Gliede der Reihe der Potenzen, das nächstfolgende Glied dieser Reihe giebt.

Man setzt also jede Potenzenreihe durch Addiren fort, wie die Reihe der Quadrate und der Würfel.

IV. Dieses Gesetz der letzten Differenzenreihe und die Berechnung der Potenzenreihe durch Addiren, lehrt Johann Faulhaber, Academia Algebrae, darinnen die miraculosischen Inventiones zu den höchsten Cossen weiters continuirt und profitirt werden, Augsp. 1631. 4°. auf der ersten Seite von Dij, denn das Buch ist sonst

nicht

nicht paginirt. Faulhaber erinnert M. Matthias Bernegger, Rector der Universität zu Strasburg habe in seinem Manuale Mathematicum gewiesen wie die Cubi aus arithmetischer Progression erwachsen, welches ihm Faulhabern zu dieser neuen Invention Anleitung gegeben. Buchstabenrechnung braucht Faulhaber nicht.

47. Aufg. **Alle mögliche Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen, die ich durch Buchstaben andeuten will, zu finden.**

Aufl. I. Zwey Dinge haben zwo Ordnungen ab; ba. kömmt dazu das dritte, so kann es in jeder Ordnung drey Stellen, hinten, mitten, vorne, einnehmen, also haben drey Dinge 3. 2 = 6 Ordnungen abc; acb; cab; bac; bca; cba; In jeder dieser Ordnungen kann das vierte Ding vier Stellen einnehmen, die hinterste; zwischen den beyden letzten; zwischen beyden ersten; die vorderste; z. E. abcd, abdc; adbc; dabc; also haben vier Dinge 4. 6 = 24 Ordnungen. In jeder derselben gibt es fünf Stellen für das fünfte Ding; drey; da es allemahl zwischen ein Paar der vorigen vier zu stehen kömmt, eine hinten, und eine vorne, als abcde; abced; abecd; aebcd; eabcd; also haben fünf Dinge 5. 24 = 120 Ordnungen. Ueberhaupt sind bey jeder Ordnung von n — 1 Dingen für das nte das dazu kömmt, n — 2 Stellen, jede zwischen einem Paare dieser Dinge; eine hinten, und eine vorne, also n Ordnungen, oder die Zahl der Ordnungen von n — 1

Dingen, muß mit n multiplicirt werden, die Zahl der Ordnungen von n Dingen zu finden. Ist also jene Zahl $(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 3.2.1$. so ist diese $n(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 3.2.1$. Aber das erste findet in den berechneten Fällen statt, da z. E. für $n-1=5$, die Zahl $5.4.3.2.1$ ist; also wird sie bey sechs Dingen $6.5.4.3.2.1$ seyn. Nun setze man $n-1=6$; so folgt eben so, daß sie bey sieben Dingen $7.6.5.4.3.2.1$ ist, u. s. w.

II. In irgend einer Ordnung von z. E. sechs Dingen, abcdef, können vier ihre Stellen behalten, und die beyden übrigen ihre Stellen verwechseln, so kömmt eine neue Ordnung eben dieser Dinge z. E. aecdbf.

Sind aber b, e, einerley, so ist abcdbf einerley mit abcdbf.

Wenn also unter den sechs Dingen, zwey einerley sind, so werden allemahl aus zwo Ordnungen nur eine, und die Zahl der Ordnungen ist halb so groß als sie wäre, wenn diese beyden Dinge nicht einerley wären. Offenbahr diente die Zahl: sechs nur zum Exempel; Allgemein haben n Dinge, $n.(n-1)\ldots.1=N$ Ordnungen, und sind unter ihnen, zwey Dinge, einerley, so gehen allemahl zwo Ordnungen in eine zusammen, und die Zahl der von einander unterschiedenen Ordnungen ist $=\frac{1}{2}N$.

Begreiflich kömmt das daher weil zwey Dinge zwo Stellungen haben, und bey einerley Stellung

lung von n — 2 Dingen, zwo Ordnungen von n Dingen kommen, nach dem man den übrigen beyden, die eine Stellung giebt, oder die andere.

III. Man nehme eine willkührliche Stellung von acht Dingen abcdefgh. In dieser sollen fünf, ihre Stellen behalten, a, c, f, g, h, die 1; 3; 6; 7; 8. Die übrigen drey sollen ihre Stellen verändern. Sie können also, unter die übrigen gesetzt, folgende Stellen einnehmen.

Stelle						
2	b	b	d	d	e	e
4	d	e	b	e	b	d
5	e	d	e	b	d	b

So giebt eine gegebene Stellung der fünf, sechs Ordnungen der acht, weil drey Dinge sechs Stellungen haben können.

Sind also diese drey Dinge einerley, jedes b, so gehen die sechs Ordnungen in eine zusammen. Und die Zahl der unterschiedenen Ordnungen von acht Dingen ist = 8. 7. 6. 5. 4.

Ueberhaupt, wenn unter n Dingen drey einerley sind, die Zahl der unterschiedenen Ordnungen = n. (n — 1) .... 4.

IV. Und so allgemein, wenn unter n Dingen, n — p einerley sind, die Zahl der unterschiedenen Ordnungen = n. (n — 1)..... (n — p + 1).

V. Eine Anwendung dieser Lehren ist auf Anagrammen. Selbst daß diese Spielwerke, nicht soviel Aufmerksamkeit verdienen als man

ihnen sonst gewähret hat, zeigt die Berechnung, denn eine mässige Zahl von Buchstaben, hat soviel Versetzungen, daß es gar nichts besonderes ist, wenn unter denselben Wörter einer oder mehrerer bekannten Sprachen vorkommen.

VI. Von solchen Versetzungen brauchbare auszusondern, darf man nur auf die Eigenschaften der Sprache merken, wie sich Vocalen und Consonanten zusammen aussprechen lassen u. s. w. Wenn man die vier Buchstaben in roma so ordnet, daß immer einer von ihnen zuerst steht, und ihm jedesmahl die Ordnungen der übrigen drey beygefügt werden, wird man noch folgende römische Wörter ausfündig machen: ramo, oram, mora, maro, armo, amor.

In einer deutschen periodischen Schrift, die den lateinischen Titel führt: Singularia historico-litteraria Lusatica, 26. Samml. 229 Seite wird bewundert, daß sich aus Sittavia, 43 Anagrammen machen lassen. Weil a, i, t, in dem Worte, zweymahl vorkommen, muß man die Zahl der Ordnungen von 8 Buchstaben mit 8 dividiren, (II) bleiben noch 7. 6. 5. 4. 3. 2 = 5040 Ordnungen, gegen welche 43 immer eine geringe Zahl ist.

VII. Ein andächtiges Spielwerk dieser Art ist eines Jesuiten zu Löwen Bernh. Bauhusius Lob der Mutter des Heylandes

Tot tibi sunt dotes, Virgo quot sidera coelo;

Die

Die acht Wörter haben 40320 Stellungen, deren viele, jede einen Hexameter geben, auch, des Dichters Erinnerung gemäß diejenigen ausgeschlossen, die der Sterne Zahl so groß angäben als die Zahl der Vorzüge der H. Jungfrau, z. Ex.

Sidera tot coelo sunt Virgo quot tibi dotes, denn die Zahl der Vorzüge sey viel gröſſer. Der Vers ist also keine Gleichung, statt Tot, quot, sollte stehen: plures, quam, aber der Verfasser muſste seinen Glauben dem Sylbenmaasse aufopfern.

Die Menge der Verse die sich aus dem angeführten versetzen lassen, ist sehr unterschiedlich angegeben worden. Jacob Bernoulli Ars Conjectandi Opus posthumum (Basel 1713.). P. II. cap. 1. p. 78. erzählt die unterschiedenen Angaben, die sich von 1022 auf 3096 erstrecken. Er hat selbst die Mühe angewandt diese Menge nach den Gesetzen der Prosodie zu bestimmen, und findet sie 3312. Die drey Seiten welche diese Bestimmung darthun finden sich a. a. O. Das Blatt ist vom Corrector unter des verstorbenen Verfassers Papieren gefunden, und beygedruckt worden. Es ist allemahl eine sehr lehrreiche Probe, wie durch Ordnung und Abtheilung sich eine Menge von Fällen durchzählen läſst, die unübersehbar scheint. Des Jesuiten Gewissenhaftigkeit hat freylich der Reformirte nicht gehabt; Vielleicht könnte doch der eifrigste Verehrer der Himmelskönigin sich mit der Menge der

Sterne begnügen, wenn die teleſkopiſchen dazu genommen werden, von denen man gleichwohl ſchon im vorigen Jahrhunderte viel wuſſte.

VIII. Athanaſii Kircheri Ars magna ſciendi Amſtelod. 1669. iſt eigentlich etwas wie die ſchon von Raymund Lullius gewieſene Kunſt, nach gewiſſen Titeln, von allerley Dingen zu ſchwatzen. Er erklärt den Titel in den Ueberſchriften der Seiten ſelbſt ſo: Ars magna ſciendi, ſiue Combinatoria. Auf der 157 Seite giebt er eine Tafel für die Mengen von Verſetzungen von 1 bis 50 Dingen.

IX. Eine ſonderbare Anwendung der Verſetzungen, macht M. Iohannis Valentini Merbitzii de Varietate faciei humanae tractat. phyſicus, Dresd. 1676. Ich muß ſeine Worte ſelbſt herſetzen. Er zählt im XVII. §. ſeines Diſcurſus, als Membra des Geſichts, acht: Frons, Naſus, Bucca, Mala, Oculos, Labia, Mentum. Potiſſimum tamen quod hic obſeruandum nobis, ſingulorum ſunt differentiae: Quinquaginta minimum vel a rudioribus attendendae.

Nun fährt er im XVIII. §. fort: Iam cogites tecum velim, quot modis hae ipſam hominis faciem variare queant naturaliter. Dico ſeptuagies millies m..... Ich ſchreibe die Angabe mit Worten und m ſtatt mille nicht ab, die mehr als eine Seite einnimmt.

Er hat über ſeinen Diſcurs eine Menge Anmerkungen beygefügt. Bey Dico, druckt er die

Zahl

Zahl mit Ziffern aus, und giebt die Art an, wie er dieſe Zahl gefunden habe, daß man ihm nachrechnen könne, ſi forte in computando, error aliquis, non mentis ſed calami irrepſerit.... Quatuor variantur vicies quater, decem 3228800 vicibus, quinquaginta autem in eam, enumeratam modo ſummam crescunt.

X. Alſo leitet Merbiz, die Mannichfaltigkeit der Geſichter daher, wie oft die funfzig Unterſchiede ihre Stellen verwechſeln können. Was es für funfzig Unterſchiede ſind, ſagt er nicht, ohnſtreitig müſſen ſie doch zu den acht Theilen des Geſichts gehören die er erzählt, und da müſſten doch wohl einmahl unter den 50. 49.... 1 Verſetzungen, Maul oben, Augen unter der Naſe, und Stirne zu unterſt vorkommen. Ich dächte alſo die ganze Methode der Rechnung wäre ein groſſer error mentis.

Die Menge der Verſetzungen von zehn Dingen, iſt richtig, aber die von funfzigen die Merbiz angiebt, ganz anders als Kirchers ſeine (VIII).

Merbiz bringt mehr Beyſpiele von Sentenzen und Verſen bey die ſich oft verſetzen laſſen, und zuletzt als etwas nicht dazu gehöriges, nur weil es ihm doch auch merkwürdig ſchien, Rabani Mauri Carmina figurata, wo Theile der Verſe die zum Unterſchiede roth gedruckt ſind, allerley Kreuze darſtellen.

XI. Gottfredi Guilielmi Leibnutzii Lipſenſis Ars combinatoria, Francof. 1690. iſt ein

neuer Abdruck, der Disputation de Arte combinatoria, mit der er sich 1666. als Magister zu Leipzig habilitirte ... Leibniz war nicht zufrieden daß dieser neue Abdruck veranstaltet worden, ohne zu erinnern: wie es eine Jugendprobe sey, Felleri Ot. Hannoueranum p. 193...: Ich habe schon zu Leipzig einen Band mit Leibnizens ersten akademischen Schriften besessen in denen sich Aenderungen bey dieser Disputation von Leibnizens Hand befinden, wie denn der ganze Band vermuthlich von ihm ist gesammlet worden, im Frankfurter Abdrucke ist nichts von diesen Aenderungen gebraucht.

Das 4. Problema dieser Schrift und die folgenden bis zum Ende, betreffen die Versetzungen, und führen eine Menge Verse und andere Exempel an, die sich noch stark vermehren liessen.

48. Lehrs. Jede Potenz der 2 ist grösser als ihr Exponent.

Bew. Daß $2^1 > 1$; $2^2 > 2$; $2^3 > 3$ fällt in die Augen. Wenn nun daraus, daß der Satz von einer gewissen Potenz angenommen wird, seine Richtigkeit für die nächst höhere fliesst, so wird er allgemein wahr seyn; denn alsdenn fliesst daraus, daß er für die dritte wahr ist, seine Richtigkeit für die vierte, und nun daraus daß er für die vierte wahr ist, seine Richtigkeit für die fünfte, u. s. w. Gesetzt nun, er sey für die Potenz r wahr, oder es sey $2^r > r$; so ist $2^r \cdot 2$ oder $2^{r+1} > 2r$; Aber wenn $r > 1$ so ist $2r > r + 1$ folg-

folglich $2^{r+1} > r+1$; d. i. wenn der Satz für die Potenz r wahr ist, so ist er auch für die Potenz $r+1$ wahr.

49. Lehrs. Wenn man von einer Grösse a; die Hälfte, und von dieser Hälfte wieder die Hälfte, und von dieser zweyten Hälfte, (dem Viertheile) wieder die Hälfte und von dieser dritten Hälfte (dem Achtheile) wieder die Hälfte, u. s. w. nimmt, so ist es allemahl möglich eine Anzahl von Halbirungen zu bestimmen, durch die man auf eine Grösse kömmt, die kleiner ist als jede nach Gefallen angegebene Grösse; c.

Bew. Man nimmt an, daß c sich mit a vergleichen lasse, und daß also c etliche mahl genommen, etwas gröfferes als a werden kann; m sey eine solche ganze Zahl, die $mc > a$ macht; so ist $\frac{a}{2^m} < \frac{mc}{2^m}$; aber $m < 2^m$ (45) folglich $\frac{mc}{2^m} < c$ oder $\frac{a}{2^m} < c$; das heisst, man kömmt durch m Halbirungen, auf einen Theil von a der kleiner als c ist.

Oft wird man durch viel weniger Halbirungen auf einen solchen Theil kommen: Aber hier ist genug, die Möglichkeit, daß man auf einen solchen Theil kommen könne, gewiesen zu haben.

Ex. Wenn $a = 1000000$; $c = 3$, so ist $\frac{1000000}{3} = 333333\frac{1}{3}$ also $m = 333334$; durch so viel Halbirungen der Million kömmt man nach dem Beweise gewiß zu einer Zahl, die weniger als 3 ist. Aber eine viel geringere Menge Halbirungen, n, die solches thut, läßt sich so finden: Es soll $\frac{1000000}{2^n} < 3$ seyn. Folglich die Logarithmen genommen $6 - n\,l\,2 < l\,3$ (Arithm. VI. 20. 21.) oder $\frac{6 - l\,3}{l\,2} < n$ der Quotient aber ist $\frac{5,5228788}{0,301} = 18, \ldots$ Man wird also diese Absicht schon durch 19 Halbirungen erreichen.

Anm. Dieser Satz ist Euklidens I. S. des X. B. und der wahre Grund der Schlüsse, die man jetzo durch die Ausdrückungen des Unendlichkleinen abzukürzen pflegt, deßwegen ich seinen Beweis überzeugend vorzutragen gesucht habe.

50. Zus. I. Es ist allemahl möglich eine bestimmte Potenz von $\frac{1}{2}$ zu finden, die kleiner ist, als jeder vorgegebene Bruch. Denn das Quadrat von $\frac{1}{2}$ ist die Hälfte der Wurzel, und jede folgende Potenz die Hälfte der vorhergehenden (Arithm. I. 76.). Folglich heißt diese Potenzen machen; $\frac{1}{2}$ beständig weiter fort halbiren, und man

man erhält die angezeigte Absicht durch eine bestimmte Anzahl solcher Halbirungen oder Potenzen (46).

II. Dieses gilt noch vielmehr von einem Bruche, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, weil von diesem jede folgende Potenz weniger als die Hälfte der nächstvorhergehenden ist.

III. Jeder eigentliche Bruch, der 1 zum Zähler hat, ist kleiner als $\frac{1}{2}$ wenn er nicht selbst $\frac{1}{2}$ ist; und so gilt II. von jedem solchen Bruche.

Die Algebra.

51. Erkl. Die Algebra lehret unbekannte Gröſſen, aus gegebenen Eigenschaften derselben, durch Gleichungen finden.

52. Erkl. Eine Gleichung heiſſt ein doppelter Ausdruck einerley Gröſſe; z. E. $7 \cdot 3 = 30 - 9$ Glieder von ihr heiſſen die Theile, die mit + und − zusammenhängen wie (2) als hier $7 \cdot 3$ und $30, 9$.

53. Zus. Es bleibt noch eine Gleichung, wenn man ein Glied, das auf einer Seite des Zeichens der Gleichheit addirt ist, auf beyden abzieht, oder das auf einer abgezogen ist, auf beyden addirt (Arithm. I. 88.). Das ist: Es bleibet eine Gleichung, wenn man ein Glied von einer Seite des Zeichens der Gleichheit mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere bringt.

$$7.3 = 30 - 9 \qquad 57 = 30 + 27$$
$$+9 = +9 \qquad -27 = -27$$
$$7.3 + 9 = 30 - 9 + 9 \qquad 57 - 27 = 30 + 27 - 27$$
$$= 30 \qquad = 30$$

54. Zuſ. So kann man alle Glieder einer Gleichung auf eine Seite bringen, daß auf der andern o ſteht; z. E. $57 - 27 - 30 = 0$.

55. Zuſ. Auch bleibt eine Gleichung (Ar. I. 88.) wenn alle Glieder mit einerley multiplicirt oder dividirt werden. Aus $7.3 + 9 = 30$ folgt $\frac{7.3}{3} + \frac{9}{3} = \frac{30}{3}$ oder $7 + 3 = 10$ ingleichen $7.3.5 + 9.5 = 30.5$.

56. Zuſ. Wenn ſich in einem oder andern Gliede der Gleichung eine unbekannte Gröſſe als Diviſor befindet, ſo kann ſie durch die Multiplication (55) aus dieſer Stelle des Diviſors weggeſchaffet werden $\frac{12}{x} = 3$ gibt $12 = 3x$.

57. Erkl. Coefficienten der unbekannten Gröſſe, heiſſen die bekannten, die in ſie multiplicirt ſind, wie 3 bey $12 = 3x$.

58. Erkl. Eine einfache Gleichung heiſſt, in welcher die unbekannte Gröſſe nicht höher als auf die erſte Potenz ſteigt, nachdem man der Gleichung die Geſtalt gegeben hat, daß die unbekannte Gröſſe nirgends ein Diviſor iſt (56).

59. Aufg.

59. Aufg. **Wenn in einer einfachen Gleichung lauter bekannte Gröſſen, bis auf eine einzige unbekannte angenommen werden, dieſe unbekannte zu finden.**

Aufl. Man bringe alle Glieder, in denen ſich die unbekannte Gröſſe befindet, allein, auf eine Seite (53). Man rechne ihre Coefficienten (57) zuſammen, wie es die Zeichen + und − erfodern, und ſehe, was ſie zuſammen geben, als einen einzigen Factor an, der in das Unbekannte multiplicirt wird: So hat man ein Product aus einem bekannten Factor in einen unbekannten, und daſſelbe iſt einer völlig bekannten Gröſſe, nähmlich der Gröſſe auf der andern Seite, gleich. Folglich findet man das Unbekannte, wenn man die Gröſſe auf der andern Seite mit dem bekannten Factor dividirt.

Exempel. Man ſucht eine Zahl, deren Hälfte, Drittheil und Viertheil zuſammen, 1 mehr betragen, als die Zahl ſelbſt. Sie heiſſe y ſo iſt $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y = y + 1$ folglich (53) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y - y = 1$ alſo (59) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1).\ y = 1$ oder (Ar. I. 74.) $(1\frac{1}{12} - 1).\ y = 1$ oder $\frac{1}{12}.\ y = 1$ oder $y = 12$. Probe $\frac{1}{2}y = 6$; $\frac{1}{3}y = 4$; $\frac{1}{4}y = 3$; und $6 + 4 + 3 = 12 + 1$.

60. Willk. Satz. **Wenn man die Gröſſen mit Buchſtaben ausdruckt, ſo brauche man die erſten Buchſtaben des Alphabetes für die bekannten, und die letzten für die unbe-**

bekannten. Dieſes geſchieht nur der Bequemlichkeit wegen, damit man während der Rechnung gleich ſieht, was man ſucht, und kann alſo nach Gefallen geändert werden.

61. Aufg. Drey unbekannte Gröſſen x, y, z, befinden ſich in drey einfachen Gleichungen A; B; C; nach Gefallen mit einander vermengt, doch ſo, daß nirgends eine mit der andern multiplicirt iſt. Man ſoll eine nach der andern finden.

Aufl. Man ſuche den Werth von x als wenn alles übrige bekannt wäre (59), ſo wohl aus A als aus B; jeder dieſer Werthe iſt alſo durch y; z, und bekannte Gröſſen gegeben. Beyde Werthe gleich geſetzt, geben eine neue Gleichung D; die nur y; z; und bekannte Gröſſen enthält: aus ihr ſuche man eben ſo den Werth von y durch z und bekannte Gröſſen; Enthält nun C nur y, z, und bekannte Gröſſen, ſo kann man eben ſo einen Werth von y aus C ſuchen, und beyde gleich geſetzt geben eine Gleichung E wo z alleine unbekannt iſt, und folglich nach (59) gefunden wird. Wäre aber auch x in C enthalten, ſo könnte man in C ſtatt ſeiner, einen ſeiner vorhin durch y und z gefundenen Werthe ſetzen, und ſo C zu der Geſtalt, daß ſie nur y und z enthält, bringen.

Hat man z aus E durch lauter Bekanntes gefunden, ſo ſetze man ſeinen völlig bekannten Werth in den Werth von y bey E; und finde

dadurch y auch durch lauter Bekanntes; und dieſe Werthe von y, z, brauche man beyde, oder einen allein in einer der erſten drey gegebenen Gleichungen, die x enthält, nachdem in dieſer Gleichung ſowohl y als z, oder nur eines von beyden vorkömmt, ſo gibt ſich auch x durch lauter Bekanntes.

Exempel. Man ſoll drey Zahlen daraus finden, daß die Summe jedes Paares von ihnen gegeben wird. Hier iſt alſo (61)
A) $x+y=a$; B) $x+z=b$; C) $y+z=c$
alſo $x=a-y=b-z$ D) und aus (39)
$y=a-b+z=c-z$ E) alſo (39) $2z=c-a+b$ und (45) $z=\frac{c-a+b}{2}$; daher bey E) $c-z=\frac{2c-c+a-b}{2}$ (Ar. I. 79. und 100.) $=\frac{c+a-b}{2}=y$ und nun bey D; $a-y=\frac{2a-c-a+b}{2}=\frac{a-c+b}{2}$
$=x$.

Es ſey $a=9$; $b=10$; $c=13$; ſo iſt $x=\frac{9-13+10}{2}=3$; $y=\frac{13+9-10}{2}$
$=6$; $z=\frac{13-9+10}{2}=7$; und $3+6=9$; $3+7=10$; $6+7=13$.

62. Anm.

62. Anm. Daß keine der unbekannten Gröſſen in die andere multiplicirt ſeyn ſoll, wird erfodert, weil ſonſt D und E nicht einfache Gleichungen würden, wie die Folge der Exempel zeigen wird.

63. Anm. Man ſieht leicht, wie auf eben die Art nur bey zwo Gleichungen und ſo viel unbekannten Gröſſen, oder bey mehrern als drey, verfahren wird; wie auch daß man alle unbekannte Gröſſen wird finden können, wenn man ſoviel Gleichungen hat, als ihrer ſind.

64. Aufg. **Aus den gegebenen Tagereiſen zweener Boten und der Zeit, wie lange der erſte weg iſt, ehe der andre ihm nachgeht, zu finden, wenn er ihn einhohlet.**

Aufl. Des erſten Tagereiſe heiſſe a; des zweyten b; die gegebene Zeit = c; die geſuchte Zeit, vom Ausgange des letzten an gerechnet = x; ſo legt der erſte Bote in der Zeit c den Weg ca zurück, ehe ihm der andere nachgeht, und den Weg ax während der Zeit, daß ihm der andere nachgeht, alſo zuſammen den Weg ac + ax, aber der andere legt während der Zeit, daß er geht, den Weg bx zurücke, welcher des erſten Boten Wege gleich ſeyn muß. Daher iſt Q) ac + ax = bx; oder ac = bx — ax. oder ac = (b — a). x. oder $\frac{ac}{b-a} = x$.

Ex. a = 6; b = 8; c = 4; $x = \frac{6.4}{8-6} = 12$

Pro-

Probe. In 12 Tagen legt der zweyte Bote 12. 8 = 96 Meilen zurücke; der erste aber in 4 + 12 = 16 Tagen; 16. 6 = 96 Meilen.

65. Zus. Wird die Zeit des Einhohlens gegeben, und dagegen die Tagereise des zweyten Boten gesucht, so sieht man x als bekannt, und b als gesucht an; folglich wird aus der Gleichung

Q nun $\frac{ac + ax}{x} = b = \frac{ac}{x} + a$.

66. Anm. Der Begriff der Boten hat in die Rechnung keinen Einfluß, und die Frage liesse sich allgemein so abfassen: aus den Geschwindigkeiten zweener Körper, die sich gleichförmig bewegen, und der Zeit, wie lange der erste vorausgelaufen ist, zu finden, wenn ihn der andere einhohlt.

Auch können die Wege, Kreisbogen seyn, die Winkel am Mittelpuncte messen, welches astronomische Anwendungen giebt. Meine geometrischen Abhandlungen, I. Samml. 10. 11. Abhandlung.

67. Aufg. Die Preise von der Kanne zwoer Arten von Weine sind gegeben: Man frage, wie viel von jedem zu einer Kanne vermischten Weines muß genommen werden, die man für einen mittlern gegebenen Preis verkaufen will.

Aufl. Die Kanne = 1 des guten Weins, gelte a; des schlechten b; des vermischten c; und

von dem schlechten befinde sich in der Kanne der Theil x; also vom guten der Theil $1 - x$. So ist der Werth des schlechten Weines in der vermischten Kanne $= bx$; des guten $a.(1-x) = a - ax$; also $bx + a - ax = c$ oder $(b-a).x = c - a$. Hier sind beyde Glieder negativ, weil a grösser als b und als c ist; Also bleibt noch eine Gleichung, wenn man sie beyde positiv macht, welches eben soviel ist, als ob man jedes auf die entgegengesetzte Seite brächte. Folglich ist $(a-b).x = a - c$ und $x = \frac{a-c}{a-b}$.

Ex. Wenn $a = 16$; $b = 10$; $c = 12$; so ist $x = \frac{16-12}{16-10} = \frac{2}{3}$.

68. Zus. Nähme man statt des schlechten Weins, Wasser, so würde $b = 0$ und die Menge des Wassers $\frac{a-c}{a}$.

69. Zus. Die Aufgabe lehret überhaupt zwey Dinge von gegebenen Werthe so vermischen, daß ein gegebener mittlerer Werth herauskömmt. Gesetzt, man wolle funfzehnlöthiges und neunlöthiges Silber so vermischen, daß dreyzehnlöthiges herauskommen soll. Weil die Mark $= 16$ Loth hier 1 heissen muß, und das löthige der Werth des Silbers ist, so ist $a = \frac{15}{16}$; $b = \frac{9}{16}$; $c = \frac{13}{16}$ also die Menge des schlechten Silbers $= \frac{4}{6}$

$\frac{15-13}{16} : \frac{15-9}{16} = \frac{1}{3}$ und des beſſern $= \frac{2}{3}$; Nähmlich $\frac{2}{3}$ einer Mark funfzehnlöthiges Silber halten an feinem Silber $\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} = \frac{10}{16}$ einer Mark und $\frac{1}{3}$ einer Mark neunlöthiges hält $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$ einer Mark; alſo halten die beyden Silber zuſammen $\frac{10+3}{16}$ fein Silber. Dieſes wird die regula alligationis genannt, und beym Münzweſen und Silberarbeiten mit Nutzen gebraucht. Siehe Schlüters Unterricht von Hüttenwerken im Probierbuche 33. Cap.

Es iſt aber nur der leichteſte Fall, der Regel welche dieſen Nahmen führt. Allgemeiner gehören Vermiſchungsrechnungen zu unbeſtimmten Aufgaben (unten 179.). In dieſer Allgemeinheit behandelt ſie, meiner Fortſetzung der Rechenkunſt XI. Capitel.

70. Erkl. Eine beſtimmte Gleichung (determinata) heiſſt, wo nur eine unbekannte Gröſſe geſucht wird.

71. Anm. Die unbekannte Gröſſe wird nähmlich durch die übrigen, die alle gegeben ſind, ſo beſtimmt, daß es nur einen Werth oder nur eine beſtimmte Menge von Werthen für ſich gibt, wie die Folge zeigen wird (223).

72. Erkl. Eine höhere beſtimmte Gleichung iſt die, in welcher die unbekannte Gröſſe auf eine höhere Potenz als auf die erſte erhoben

ist. Der Grad dieser Potenz ist auch der Grad der Gleichung, welche quadratisch, cubisch, vom fünften Grade, u. s. f. heisst, nachdem das Quadrat, der Würfel, die fünfte Potenz, der unbekannten Grösse in ihr befindlich sind.

73. Erkl. Eine bestimmte Gleichung ist rein oder unrein (pura vel adfecta) nachdem sich in ihr blos die höchste Potenz der unbekannten Grösse, die ihrem Grade gemäß ist, oder dabey noch niedrigere befinden.

74. Erkl. Die Wurzel (Radix) einer Gleichung heisst der Werth der unbekannten Grösse in ihr. Ihn finden, heisst die Gleichung auflösen.

75. Aufg. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $z^2 = f$ folglich $z = \pm \sqrt{f}$ (32).

76. Aufg. Aus der Summe (a) zweyer Zahlen und ihrer Quadrate Summe (b), die Zahlen zu finden.

Aufl. Der Zahlen halber Unterschied heisse y; so ist die grosse $= \frac{1}{2}a + y$ die kleine $= \frac{1}{2}a - y$ (Trig. 13. S.)

das Quad. d. gr. $= \frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$ (Ar. IV. 1.)

d. kl. $= \frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$ (Ar. II. 5. 2. Ex.)

Summe d. Quad. $= \frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$

also

also $y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$ folglich $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$ nähmlich wenn die eine $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$ so ist die andere $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$.

Ex. Wenn $a = 10$; $b = 58$, so ist $y = \pm\sqrt{(29 - 25)} = \pm 2$ und die eine Zahl $5 + 2 = 7$ die andere $5 - 2 = 3$; Es ist aber $49 + 9 = 58$.

Wäre der Unterschied der Quadrate, c, gegeben, so fände sich $2ay = c$ oder $y = \frac{c}{2a}$

Z. E. wenn $a = 10$; $c = 40$; $y = \frac{40}{20} = 2$ wie vorhin.

77. I. Man nenne die beyden Zahlen t, u, also $t + u = a$; $t^2 + u^2 = b$; giebt $u = a - t$, daher $t^2 + a^2 - 2.a.t + t^2 = b$. Nach gehöriger Stellung giebt dieses $t^2 = a.t + \frac{1}{2}.(b - a^2)$, eine unreine quadratische Gleichung, die sich nach (78) auflösen läßt, hat man aus ihr t, so findet sich auch u.

II. Hie sucht man zwey Dinge t, u, offenbahr von unterschiedner Größe. Ob aber t, oder u, das Größte von beyden bedeutet, ist aus der Bezeichnung nicht abzusehen. Die Gleichung also die t giebt, muß so wohl das Größte als das Kleinste geben, und daher so beschaffen seyn, daß man aus ihr beyde ungleiche Werthe findet. Auch findet man mit eben dergleichen Rechnung, $u^2 = a.u + \frac{1}{2}.(b - a^2)$, völlig einerley quadratische unreine Gleichung für t und für u.

III. Nach (78) findet sich $t = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$ das heißt vermöge (H)

die grössere $= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

die kleinere $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

Unterschied $= 2.\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$ wie in (76).

IV. In (76) war der Unterschied den man suchte eine einzige Grösse, nur in der Bedeutung doppelt, daß man ihn addirte, oder abzog. In (77) ist das gesuchte t oder u, eine Grösse, die in der That zweene unterschiedene Werthe hat, und eine Gleichung stellt sie beyde dar. Diese Gleichung ist . . freylich nicht viel, doch etwas verwickelter als die (76), und erfodert zur Auflösung den eignen Kunstgriff (78).

V. Hieraus fliesst eine Regel für die Analysis: Wenn man nach zwey Dingen forscht, die beyde durch ein einziges gegeben sind, nur auf unterschiedne Art bey jedem angebracht, so nehme man dieses einzige für die gesuchte Grösse.

So wenn von ein Paar unbekannten Zahlen der Unterschied gegeben wäre, nähme man zur gesuchten Grösse, ihre Summe, nicht zwo gesuchte Grössen, die Zahlen selbst.

VI. Ehe man also das Gegebene und das Gesuchte, mit Buchstaben bezeichnet, muß man überlegen, wie die gegebenen und gesuchten Grössen einander bestimmen, d. i. man muß erst denken ehe man Zeichen für die Gedanken macht. In ältern algebraischen Büchern, auch noch in Wolfs seinen z. E. Algebra §. 35. des Auszuges,

steht

ſteht als erſte Vorſchrift zu Auflöſung einer Aufgabe: Man benenne die bekannten Gröſſen mit den erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten mit den letzten. Aber die Benennung muß nicht das erſte ſeyn, ſondern die Betrachtung des gegenſeitigen Verhaltens der gegebenen und geſuchten Gröſſen.

78. Aufg. Eine unreine quadratiſche Gleichung aufzulöſen.

Aufl. Ihr allgemeiner Ausdruck iſt G) $z^2 = pz + q$ wo p und q nach Gefallen bejahte und verneinte Gröſſen vorſtellen können. Das Quadrat hat keinen von 1 unterſchiedenen Coefficienten, denn wenn es auch dergleichen gehabt hätte, ſo lieſſe ſich ſolcher doch durch die Diviſion (55) wegſchaffen. Man mache aus dieſer Gleichung die H) $z^2 - pz = q$. Nun wäre $(z - \frac{1}{2}p)^2 = z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2$ (Ar. II. 5.) addirt man alſo bey H auf beyden Seiten $\frac{1}{4}p^2$ oder das Quadrat des halben Coefficienten bey z; ſo bekömmt man

I) $z^2 - pz + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ oder
$(z - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ folglich (75)

K) $z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ und

L) $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

So geben G und L allgemeine Formeln, die man auf alle beſondere Fälle anwenden kann, wenn p; q; gehörig beſtimmt werden.

79. Aufg. Man ſuche zwo Zahlen, x; y; bey denen Product, Summe; und Unterſchied der Quadrate; gleich ſind.

Aufl. Alſo iſt I) $x^2 - y^2 = xy$; II) $x + y = xy$; folglich III) $x + y = x^2 - y^2 = (x+y).(x-y)$ (Ar. II. 5.) alſo (55) IV) $1 = x - y$ oder (39) V) $1 + y = x$; daher in II; $1 + 2y = y + y^2$ oder VI) $y^2 = y + 1$; dieſe Gleichungen mit G (78) verglichen gibt $s = y$; $p = 1$; $q = 1$; alſo aus L) (78) $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 1)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (21) und aus V) $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$; Man kann nähmlich nach Gefallen in den zuſammengehörigen Werthen der geſuchten Gröſſen die beyden obern Zeichen der Wurzelgröſſen, oder die beyden untern brauchen.

Proben
$x + y = 2 \pm \sqrt{5}$
$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$
$\pm \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot 5$

Product $= 2 \pm \sqrt{5}$
$x^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot 5$
$y^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot 5$

Unterſchied $= 2 \pm \sqrt{5}$

Anm.

Anm. Hie werden zwo Zahlen gefunden, ohne daß irgend eine gegeben wäre. Der allgemeine Begriff vom Rechnen ist also nicht: Aus gegebenen Zahlen andere finden. Man findet auch Zahlen, aus ihrem gegebenen gegenseitigen Verhalten. Freylich erinnere ich mich jetzo, aus der gemeinen Rechenkunst, keines Exempels dieser Art.

Von der Arithmetischen Progression.

80. Erkl. Eine Menge Zahlen die in gleichen zusammenhängenden arithmetischen Verhältnissen (Arithm. V. 8.) fortgehen, machen eine arithmetische Reihe oder Progression aus.

81. Zus. Ist das erste Glied = a, der Unterschied = d; die Zahl der Glieder n; so ist Zahl der Glieder

1; 2; 3; 4; 5; .... n
a; a+d; a+2d; a+3d; a+4d; .... a+(n−1).d

82. Erkl. Die Progression steigt oder fällt (ascendit; descendit) nachdem die Glieder zu- oder abnehmen; Für die fallende ist d verneint.

83. Lehrs. Die Summe des ersten und des letzten Gliedes; oder der beyden äussersten Glieder ist so groß als die Summe jedes Paares Glieder, da das eine so weit vom Anfange entfernt ist, als das andere vom Ende.

Bew. Der beyden äuſersten Summe iſt $2a + (n-1)d$. Nun iſt das letzte ohne eines, oder das zweyte vom Ende gezählt $= a + (n-2)d$; weil es nähmlich eine Differenz d weniger haben muß als das letzte; dieſes Glied nun macht mit dem zweyten vom Anfange gezählt $a+d$, eben die Summe. Der Grund iſt leicht zu ſehen: das zweyte vom Ende hat einen Unterſchied weniger als das letzte, und das zweyte vom Anfange einen mehr als das erſte. Alſo haben die zweyten Glieder zuſammen ſoviel Unterſchiede als die beyden äuſerſten. So geht es beſtändig fort; wenn man vom Ende um eine Stelle vorwärts geht, ſo verliert man einen Unterſchied, und wenn man vom Anfange um eine Stelle nach dem Ende zu geht, ſo gewinnt man einen; daß alſo die Menge der Unterſchiede zuſammen in Stellen, die von den äuſerſten gleich entfernt ſind, allemahl einerley bleibt; und da jedes Glied aus dem erſten und einer Menge Unterſchiede beſteht, ſo iſt die Summe zweyer ſolcher gleich entfernter Glieder allemahl einerley. Es ſey ein Glied das rte vom Anfange; ſo iſt es $= a + (r-1)d$. Ein anders ſey das rte vom Ende; dieſes muß alſo $r-1$ Unterſchiede weniger enthalten als das letzte, denn das zweyte vom Ende enthält einen weniger, das dritte zween, u. ſ. f. Es iſt alſo $a + (n-1-(r-1))d = a + (n-r)d$ und beyder Summe iſt der Summe der äuſerſten gleich.

84. Zuſ.

84. Zuſ. Wenn die Zahl der Glieder ungerade iſt, ſo iſt das mittelſte vom Anfange und vom Ende gleich entfernt, folglich ſein Doppeltes auch der Summe der beyden äuſerſten gleich. In dieſem Falle müſſen vor dem mittelſten Gliede $\frac{n-1}{2}$ Glieder vorhergehen, und eben ſo viel nach ihm folgen, damit die Anzahl der vorhergehenden und folgenden, nebſt dem mittelſten Gliede, zuſammen n iſt. Alſo iſt das mittelſte Glied das $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$te und folglich $= a + \frac{n-1}{2} d$ deſſen Doppeltes offenbahr der Summe der beyden äuſern gleich iſt.

85. Zuſ. Wenn die Zahl der Glieder gerade iſt, und man allemahl ein Paar ſolcher von den äuſerſten gleich entfernter Glieder zuſammen nimmt, ſo gibt es halb ſo viel Paare als Glieder ſind. Multiplicirt man nun die Summe der beyden äuſerſten, durch die Zahl der Paare, d. i. durch die halbe Zahl der Glieder, ſo hat man die Summe aller. Das erſte Glied ſey alſo $= A$; das letzte $= V$; die Zahl der Glieder $= N$; die Summe aller, oder der Progreſſion $= S$, ſo iſt $S = (A + V.) \frac{1}{2} N$.

86. Zuſ. Bedeutet aber N eine ungerade Zahl, ſo gibt es $\frac{N-1}{2}$ Paare ſolcher von den

äuſer-

äuſerſten gleich entfernter Glieder, worunter das mittelſte einzelne ſich nicht befindet. Die Summe dieſer $\frac{N-1}{2}$ Paare iſt wiederum $(A+V)$. $\frac{N-1}{2}$ und dazu muß man das mittelſte einzelne addiren, die Summe der ganzen Progreſſion zu haben: Aber dieſes mittelſte iſt $\frac{A+V}{2}$ (84) alſo die Summe der Progreſſion $(A+V)\frac{N-1+1}{2} = \frac{(A+V).N}{2}$ wie vorhin.

87. Zuſ. $V = A + (N-1).D$ wenn D den Unterſchied bedeutet (81).

88. Zuſ. Wenn von den fünf Dingen A; D; V; N; S; drey gegeben ſind, laſſen ſich die übrigen beyden daraus vermittelſt der Gleichungen (87; 85;) finden (63).

89. Aufg. **Aus dem erſten Gliede, der Zahl der Glieder, und dem Unterſchiede; das letzte und die Summe zu finden.**

Auflſ. Sie iſt in den Gleichungen (87. 85.) enthalten.

90. Ex. Man verlangt die Summe der erſten 1000000 natürlicher Zahlen zu wiſſen. Hier iſt $A=1$; $D=1$; $N=1000000$; $V=1000000$; $S=1000001.\frac{1000000}{2} = 500000500000$.

91.

91. Aufg. Die Summe von den erſten N ungeraden Zahlen zu finden.

Aufl. $A=1$; $D=2$; $V=1+(N-1).2=2N-1$; und $S=(1+2N-1).\frac{1}{2}N=N^2$ (wie in 40.).

So iſt die tauſendſte ungerade Zahl $=2000-1=1999$ und die Summe der erſten tauſend ungeraden Zahlen $=1000000$.

92. Aufg. Aus dem erſten und lezten Gliede, und dem Unterſchiede, die Zahl und die Summe zu finden.

Auflöſ. Man ſuche N; S; Aus (87) iſt $\frac{V-A+D}{D}=N$ folglich $S=\frac{A+V}{2}.\frac{V-A+D}{D}$.

93. Ex. $A=2$; $V=17$; $D=3$; alſo $N=\frac{17-2+3}{3}=6$; $S=\frac{17+2}{2}.6=19.3=57$; die Progreſſion iſt nähmlich P, 2; 5; 8; 11; 14; 17.

94. Anm. Nähme man $V=16$; das übrige wie vorhin, ſo käme $N=\frac{16-2+3}{3}=\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$; die Bedeutung hievon iſt dieſe: Man kann die arithmetiſche Verhältniß zwiſchen jeden nächſt nach einander folgenden Gliedern, in kleinere theilen, wenn man zwiſchen dieſe Glieder

Zah,

Zahlen in stetiger Proportion setzt; Wenn man zwischen 14 und 17 noch 15 und 16 setzte, so wären die arithmetischen Verhältnisse 14 zu 15; 15 zu 16; 16 zu 17; Drittheile der Verhältniß 14 zu 17; oder die Zahlen 14 und 15; 15 und 16; 16 und 17; lägen dreymahl näher beysammen, wenn man die Entfernung nach der arithmetischen Verhältniß durch den Unterschied misst, als die Zahlen 14 und 17. Ist also in der arithmetischen Reihe 14 die fünfte und 17 die sechste Zahl; rückt nähmlich eine Zahl um eine Stelle weiter fort, wenn sie von der nächst vorhergehenden um eine solche arithmetische Verhältniß unterschieden ist, wie in der Reihe für ein Ganzes angenommen wird, so muß die Stelle der 16 in dieser Reihe um $\frac{2}{3}$ des ganzen, das hier zum Maasse der Entfernungen zwischen zwey nächsten Gliedern angenommen wird, von der 14 entfernt, d. i. diese Stelle muß $5\frac{2}{3}$ seyn. So erhellt, daß N ein Bruch wird, wenn man zwischen die Zahlen die um ganze solche arithmetische Verhältnisse, wie D bestimmt, unterschieden sind, noch andere einschiebt.

In der Progression Q) 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; kämen alle Zahlen der Progression P vor; aber jede Verhältniß zwoer nächsten Zahlen in P ist in Q, in drey getheilt worden; oder die Verhältniß in P ist dreymahl so groß als die in Q; die Entfernung der 5; 8; 11; 16 vom ersten Gliede, sind 3; 6; 9; 14 in Q; aber 1; 2; 3; 5. in

in P, und diese Entfernungen um 1 vermehrt, geben die Zahl des Gliedes weil die erste Entfernung zum zweyten Gliede, die zweyte zum dritten, u. s. w. bringt.

95. Anm. Die gegebenen Dinge (88) können seyn 1) A; V; N; 2) A; V; D; 3) A; V; S; 4) A; N; D; 5) A; N; S; daß sich also fünf Aufgaben auflösen lassen, die alle durchzugehen nicht nöthig ist.

Summirung arithmetischer Reihen und allerley Anwendungen lehret meine Fortsetzung der Rechenkunst, VIII. Cap. 1. Abschnitt.

Von der geometrischen Progression.

96. Erkl. Wenn bey einer geometrischen Reihe (Arithm. VI. 10.) das erste Glied = a; der Exponent = e; so ist ihr allgemeiner Ausdruck folgender:

Zahl der Glieder						
1;	2;	3;	4 ...	n−2.	n−1.	n
				n−3	n−2	n−1
a;	ea;	e^2a;	e^3a;	ea;	ea;	ea

97. Zus. Wenn das nte Glied = u heißt, so gibt sich so gleich sein Ausdruck $u = ea^{n-1}$.

98. Zus. Die Summe dieser aus n Gliedern bestehenden Reihe, heisse f; so ist $f = (1 + e + e^2 .... + e^{n-1})\,a$ dafür ich P.a schreiben will. Nun setze man in (7) $x = e$ $m =$

$m = n - 1$; ſo iſt $P + \frac{e^n}{1-e} = \frac{1}{1-e}$; alſo

$$s = \left(\frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e}\right) \cdot a = \frac{a - e^n a}{1-e} = \frac{a - ue}{1-e}.$$

99. Zuſ. Wenn die Progreſſion fällt, oder die folgenden Glieder kleiner werden, ſo iſt e ein eigentlicher Bruch, und in dem Ausdrucke $s = \frac{a - ue}{1-e}$ Zähler und Nenner poſitiv.

100. Zuſ. Wenn ſie aber ſteigt, ſo iſt e ein uneigentlicher Bruch, und der erwähnte Zähler und Nenner ſind beyde negativ, aber doch iſt der Quotient poſitiv, und bleibt unverändert, wenn man beyde poſitiv macht, oder hier $s = \frac{ue - a}{e - 1}$ ſetzt.

101. Zuſ. Aus dem erſten Gliede, der Zahl und dem Exponenten, findet man durch die Gleichungen (97. 98. oder 100.) unmittelbar das letzte und die Summe.

102. Zuſ. Dieſe Gleichungen löſen fünf Aufgaben auf wie in 95.

103. Zuſ. Wenn das zweyte Glied b heißt, ſo iſt $e = \frac{b}{a}$ daß man alſo dadurch den Exponenten finden, und wegſchaffen kann.

104.

104. Ex. Einer Progression erstes Glied ist 2; das zweyte 6; man sucht das sechste, und die Summe der ersten sechs.

Hier ist $a = 2$; $b = 6$; $\frac{b}{a} = 3 = e$; $n = 6$; $u = 3^5 . 2 = 486$; und aus (100) $f = \frac{1458 - 2}{3 - 1} = 728$; die Progression ist 2; 6; 18; 54; 162; 486.

105. Aufg. Aus dem ersten Gliede, dem Exponenten, und dem letzten Gliede, die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. In (97) wird hier aus Ar. VI. 20. 21. $lu = (n - 1)\, le + la$; also $lu - la = (n - 1)\, le$ und $\frac{lu - la}{le} + 1 = n$.

Hieher gehört Ar. VI. 33. drittes Exempel, wo $n = 1 - e = 2$; $u = 8192$; $n - 1 = x$.

106. Aufg. Eine Zahl zu finden, der die Summe der Reihe $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... so weit man will fortgesetzt, so nahe als man will kommen, aber solche nie erreichen kann.

Aufl. Hier ist $= \frac{1}{2} = e$ und in 98. $f = \frac{1}{2}$. $\frac{1 - u}{\frac{1}{2}} = 1 - u$. Die Summe so vieler Glieder als man auch zusammenrechnet, ist daher als lemahl kleiner als 1; aber u kann kleiner werden als jede Grösse, die sich angeben läßt (28).

folglich kann man die Reihe allemahl so weit fortsetzen, daß die gefundenen Glieder zusammen addirt Etwas geben, das der Einheit so nahe kömmt als man will, oder von ihr um etwas geringers als jede Grösse, die sich angeben läßt, unterschieden ist, und die gesuchte Zahl ist also = 1.

107. Anm. Man trägt diese Auflösung insgemein folgender Gestalt vor: Wenn die Reihe ohne Ende fortgesetzt wird, so verschwindet das letzte Glied, oder dasjenige, das vom Anfange unendlich weit entfernt ist, läßt man es aber weg, so wird $s = 1$ welches also die Summe unendlich vieler Glieder dieser Reihe seyn wird. Es fällt in die Augen, daß dieses eben so viel sagen will, als in der vorigen Auflösung gesagt wurde.

108. Erkl. Wenn bey einer Reihe immer abnehmender Brüche, die Glieder nach und nach addirt, Etwas geben das sich einer gewissen Zahl immer nähert, und solcher wenn man mehr und mehr Glieder nimmt, so nahe kommen kann als man nur will, sie aber nie völlig erreichet, so sieht man die Reihe als unendlich weit fortgesetzt an, und heißt die erwähnte Zahl die Summe dieser unendlichen Reihe.

109. Aufg. Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe von Brüchen zu finden, da der Zähler des ersten Gliedes 1; und der Exponent der Verhältniß dem ersten Gliede gleich ist.

Aufl.

Aufl. Weil hier $e = a$; so ist $f = \frac{a}{1-a}$, $(1-u)$ (98) aber u kann bey Fortsetzung der Reihe kleiner werden als jede Grösse, die sich angeben lässt (50), also ist die Summe $= \frac{a}{1-a}$.

So sind die Summen von

$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81} \ldots = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256} \ldots = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}; \frac{1}{x^3}; \frac{1}{x^4} \ldots = \frac{1}{x-1}$.

110. Zus. Wenn die Zeichen der Glieder in einer solchen Reihe abwechseln, wie in

A) $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \ldots$

so theile man sie in zwo. Die verneinten Glieder nähmlich geben für sich ohne Absicht auf das Zeichen die Reihe

C) $\frac{1}{y^2}; \frac{1}{y^4}; \frac{1}{y^6};$

und die bejahten Glieder geben die Reihe

B) $\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^5} \ldots = \frac{1}{y} \cdot (1+C)$

Nun ist $A = B - C$ also $= \frac{1+C}{y} - C$ aber wenn man in (109) $a = \frac{1}{y^2}$ setzt, so findet sich

$C = \frac{1}{y^2-1}$ folglich die Summe der Reihe $A =$

$\frac{y^2}{y.(y^2-1)} - \frac{1}{y^2-1} = \frac{y-1}{y^2-1} = \frac{1}{y+1}$

(Arithm. II. §. III. Ex.).

111. Anm. Es ist klar, daß $A + 2C$ die Summe einer unendlichen Reihe gibt, die mit A einerley Glieder, aber alle bejaht hätte. Denn eine solche Reihe wäre $= B + C$ da die vorgegebene $B - C$ ist. Aber $A + 2C = \frac{1}{y+1} +$

$\frac{2}{y^2-1} = \frac{y-1+2}{y^2-1} = \frac{y+1}{y^2-1} = \frac{1}{y-1}$.

wie (109).

112. Zus. $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \ldots$

$= \frac{1}{y+2} + \frac{1}{(y+2)^2} + \frac{1}{(y+2)^3} \ldots$

Denn in 109. sey $x = y + 2$ so ist $\frac{1}{y+2} +$

$\frac{1}{(y+2)^2} \ldots = \frac{1}{y+1} = A$ (110) §. Ex.

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ldots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots$

113. Lehrs. Die Reihe der Unterschiede einer geometrischen Reihe (96) ist auch eine geometrische, die eben den Exponenten hat.

Bew. Die Reihe der Unterschiede ist

$(e-1).a;\ e.(e-1)a;\ e^2.(e-1)a \ldots . e^{n-3}$

$(e-1)$

$(e-1)a; e^{n-1}(e-1)a$ wo jedes folgende Glied mit dem vorhergehenden dividirt e gibt, wie in der Hauptreihe (96).

114. Zuſ. Wenn von dieſen Unterſchieden wieder Unterſchiede genommen werden, ſo iſt die zweyte Differenzreihe auch eine geometriſche von eben dem Exponenten, und eben ſo die dritte oder die Reihe der Unterſchiede der zweyten Unterſchiede, und ſo hat jede geometriſche Reihe ohne Ende fort lauter geometriſche Reihen von Unterſchieden.

Exempel.

Hauptreihe	1;	3;	9;	27;	81; 243
I. Unt.		2;	6;	18;	54; 162
II. Unt.			4;	12;	36; 108
III. Unt.				8;	24; 72
IV. Unt. u. ſ. w.					16; 48

115. Zuſ. Das erſte Glied der zweyten Reihe der Unterſchiede iſt $(e-1)^2 . a$; und alſo machen die erſten Glieder der Hauptreihe und der beyden erſten Differenzenreihen eine zuſammenhängende Proportion. Wenn die erſten Glieder, der Hauptreihe, und der Reihen der Unterſchiede, nach der Ordnung p; q; r; ſ; t; heiſſen, ſo iſt $p:q = q:r$; und weil man nun die erſte Reihe der Unterſchiede als eine Hauptreihe anſehen kann (114), $q:r = r:ſ$ und nun die zweyte Differenzenreihe als eine Hauptreihe angeſehen $r:ſ = ſ:t$ u. ſ. w. Alſo machen die erſten

ſten Glieder eine geometriſche Reihe aus, deren Exponent $e - 1$ iſt.

Anm. Summirung geometriſcher Reihen, und Anwendung derſelben, findet ſich in meiner Fortſetzung der Rechenkunſt VIII. Cap. 2. Abſchnitt.

Der Binomiſche Lehrſatz.

116. Aufg. Die vierte und fünfte Potenz einer zweytheilichten Wurzel zu finden.

Aufl. Man multiplicire den Würfel (Ar. IV. 28.)

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ mit

b. Wurzel $a + b$

giebt die $a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$+ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

4. Pot. $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. das mult. mit $a + b$

giebt die $a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$
$+ a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$

5. Pot. $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

117. Zuſ. Auf eben dieſe Art laſſen ſich die höhern Potenzen nach der Reihe finden. Dieſes gibt folgende Tafel:

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

112. Zuſ. Bey jedem Theile einer Potenz, kann man auf zwey Dinge ſehen; auf die Exponenten, welche die Theile der Wurzel darinnen haben, und auf den Coefficienten, d. i. auf die Zahl, mit welcher das Product aus den Theilen der Wurzel multiplicirt iſt, z. E. im vierten Theile der fünften Potenz ſind die Exponenten der Theile der Wurzel 2; 3; und der Coefficient iſt 10.

119. Zuſ. Bey allen den Potenzen (117) iſt das Geſetz der Exponenten folgendes: a hat im erſten Gliede der Potenz, mit der Potenz ſelbſt einen Exponenten, und ſein Exponent wird in jedem Gliede um 1 vermindert, bis er im letzten Gliede $= 0$ wird (Ar. II. 11.) der Exponent von b aber iſt im erſten Gliede $= 0$; im zweyten $= 1$ und wächſt ſo in jedem folgenden Gliede um 1 bis er im letzten, den Exponenten der Potenz gleich wird.

Wenn dieſes Geſetz bey irgend einer Potenz, deren Exponent m heiſſen mag, ſtatt findet, ſo findet es auch bey der nächſthöhern, deren Exponent $m+1$ heiſſen mag, ſtatt. Denn man nehme dieſes Geſetz von der erwähnten Potenz an. Man ſchreibe ſtatt der Coefficienten, deren Geſetz wir jetzt noch nicht wiſſen, groſſe Buchſtaben, und ſetze alſo

$(a+b)$

$(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 \ldots$
$+ O.a^{m-n+1}b^{n-1} + Pa^{m-n}b^n + Qa^{m-n-1}b^{n+1}$

multiplicirt mit $a+b$ gibt

(ℭ)	a^{m+1}	$+A$	$a^m b$	$+B$	$a^{m-1}b^2 \ldots$
		$+1$		$+A$	$\ldots\ldots$
(ℭ′)		$+P$	$a^{m-n+1}b^n$	$+Q$	$a^{m-n}b^{n+1}$
		$+O$	$\ldots\ldots$	$+P$	

Die oberſte Zeile bey (ℭ) und bey (ℭ′) ſtellt die niedrige Potenz mit a, die unterſte mit b multiplicirt vor, wo man ſich jede Zahl 1; A; .. P; mit in das Product der Potenzen von a und b multiplicirt vorſtellen muß, das in der obern Zeile ſteht, ſo iſt klar, daß das erſte und das letzte Glied der höhern Potenz Producte aus dem erſten und dem letzten Gliede der niedrigern, in a und in b ſind: Aber jedes mittlere Glied der höhern Potenz beſteht aus zwey Stücken, aus einem Producte von a in ein gewiſſes Glied der niedrigern Potenz, und aus einem Producte von b in dieſer niedrigern Potenz nächſtvorhergehendes Glied, weil nähmlich dieſes nächſtvorhergehende Glied der niedrigern Potenz, b um einen Grad niedriger, und a um einen Grad höher enthielt als das nächſtfolgende, ſo kommen einerley Abmeſſungen von a und b heraus, wenn man jenes mit a und dieſes mit b multiplicirt, und alſo geben dieſe beyden Producte zuſammen nur ein Glied der nächſthöhern Potenz, welches auch nur aus ihnen beyden allein beſtehet, weil jedes andere Glied

der niedrigern Potenz mit den Theilen der Wurzel multiplicirt, andere Potenzen dieser Theile enthält. So geben die Glieder der niedrigern Potenz, die P und Q zu Coefficienten haben, jenes mit a, dieses mit b multiplicirt, zusammen ein Glied der höhern Potenz und wiederum die, welche Q und P zu Coefficienten haben, da denn, wenn man die beyden nächstnacheinander folgenden Glieder der höhern Potenz betrachtet, die Exponenten von a ebenfalls beständig um 1 abnehmen, und die von b um 1 zunehmen. Also das angenommene Gesetz von jeder Potenz auf die nächst höhere folgt.

120. Zus. Es ist aber dieses Gesetz vermöge der Rechnung (116) von der 1; 2; 3; 4; 5; wahr. Und nun setze man $m = 6$; so gilt es von $m + 1$. Also setze man $m = 5$; so gilt es von $m + 1$ oder 7; u. s. w. ohne Ende von allen, und man kann also den 119. gegebenen Ausdruck der Potenz m als allgemein richtig ansehen, und die Exponenten von a und b machen in jedem Gliede zusammen der Potenz Exponenten aus.

121. Zus. Wenn man in jeder Potenz das Glied, darinnen a auf den höchsten Grad erhoben ist, das erste nennt, so ist die Zahl jedes Gliedes um eins mehr als der Exponent von b; denn dieser Exponent ist in demjenigen, das alsdenn das zweyte heißt 1; im dritten 2 u. s. w.

Unter-

Unterscheidet man aber die Reihe in zwey Stücke, davon das nur genannte Glied welches a allein enthält, eines und alle die folgenden das andere ausmachen, so ist unter diesen folgenden das erste, zweyte, nte, wo der Exponent von b; 1; 2; n; ist, oder diese Exponenten zeigen die Zahlen dieser folgenden Glieder selbst an.

122. Zus. Jede Potenz hat ein Glied mehr als ihr Exponent Einheiten hat. Denn die Zahl der folgenden Glieder (121) muß dem Exponenten gleich seyn, weil sie alle Potenzen von b, von der ersten an bis auf die, welche diesen Exponenten hat, enthalten (119) und zu diesen Gliedern kömmt noch das, welches kein b enthält (121).

So hat jede höhere Potenz ein Glied mehr als die nächst niedrigere.

123. Zus. Der Coefficient eines gewissen Gliedes der nächsthöhern Potenz ist die Summe der beyden Coefficienten, die zum eben sovielten, und zum nächstvorhergehenden, der nächstniedrigeren, gehören.

So gehört Q + P in m + 1 zum n + 1ten Gliede (119) und in m gehören Q zum n + 1ten, P zum nten Gliede.

124. Zus. Für das letzte Glied der höhern Potenz, gibt es kein eben sovieltes der niedrigen (122) also ist sein Coefficient mit dem Coefficienten des Gliedes der niedrigern einerley, das vor dem, welches das eben sovielte wäre, vorhergienge, d. i. mit dem Coefficienten des letzten

Glie-

Gliedes der niedrigern Potenz. Iſt alſo bey einer Potenz der Coefficient des letzten Gliedes = 1; ſo findet dieſes auch für die nächſthöhere, und ſo für alle ſtatt, wenn man immer von einer auf die andere ſchlieſſt.

125. Erkl. Die Coefficienten des erſten, zweyten, nten, (n + 1)ten, u. ſ. w. der folgenden Glieder (121), ſollen der erſte, zweyte, nte, (n + 1)te, heiſſen, ſo daß die 1 welche in das Glied, das kein b enthält, multipliciret iſt, hier nicht mit unter den Coefficienten gezählt wird.

126. Zuſ. Wenn der Potenz m; erſter Coefficient A = m iſt; ſo iſt der Potenz m + 1 erſter Coefficient m + 1 (119) d. i. wenn irgend einer Potenz erſter Coefficient ihrem Exponenten gleich iſt, ſo iſt der nächſthöhern Potenz erſter Coefficient auch ihrem Exponenten gleich.

127. Zuſ. Dieſe Vorausſetzung aber (126) findet für die fünfte Potenz ſtatt (116) alſo für m = 5 und folglich für m + 1 oder 6; und nun für m = 6; folglich für m + 1 = 7 u. ſ. w. für alle Potenzen; daß alſo jeder Potenz erſter Coefficient ihrem Exponenten gleich iſt.

128. Zuſ. Der zweyte Coefficient der zweyten Potenz iſt dem erſten der erſten gleich, der zweyte der dritten beſteht aus dem zweyten und erſten der zweyten (123) und iſt alſo 1 + 2, der zweyte der vierten beſteht aus dem zweyten und erſten der dritten, und iſt alſo = 1 + 2 + 3, der zweyte der fünften beſteht aus dem zweyten

und

und ersten der vierten, und ist also $1+2+3+4$. Ist also in irgend einer Potenz der zweyte Coefficient die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis mit auf die Zahl, die um 1 geringer ist als der Exponent, so findet sich der zweyte Coefficient der nächsthöhern Potenz, wenn man zu der erwähnten Summe, den ersten der niedrigen Potenz, d. i. ihren Exponenten (127) addirt, dieser Exponent aber ist um 1 weniger als der Exponent der nächsthöhern, und also ist wieder der zweyte Coefficient der nächsthöhern, die Summe aller natürlichen Zahlen, bis mit auf die welche um 1 geringer ist als der Exponent dieser nächsthöhern Potenz. Gilt es also von irgend einer Potenz, daß ihr zweyter Coefficient die Summe aller natürlichen Zahlen bis auf den um 1 verminderten Exponenten ist, so gilt dieses auch von der nächsthöhern.

129. Zus. Es gilt aber von der zweyten; und also von der dritten; und da es nun von der dritten gilt, gilt es auch von der vierten, u. s. w. ohne Ende.

130. Zus. Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis mit auf $m-1$ ist $(1+m-1).\frac{m-1}{2}$ (89) $= \frac{m.(m-1)}{1.2}$; welches also der allgemeine Ausdruck jedes zweyten Coefficienten ist.

131. Zus. Wenn man den ersten und zweyten Coefficienten (127. 130.) mit einander vergleicht,

gleicht, so kann man darauf fallen, ob sich nicht vielleicht der dritte durch $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ ausdrücken lasse. Man wird auch sehen, daß dieses zutrifft; denn für $m = 1.2; 3; 4; 5$ u. s. w. wird er $\frac{2.0}{1.2}$; $\frac{3.2.1}{1.2.3}$; $\frac{4.3.2}{1.2.3}$; $\frac{5.4.3}{1.2.3}$; oder 0; 1; 4; 10; u. s. w. wie in der Tafel. In der That läßt sich auch dieser allgemeine Ausdruck des dritten Coefficienten vermöge (123) unmittelbar finden; Aber durch Kunstgriffe, deren Erklärung hier zu viel Weitläuftigkeiten erfoderte. Ich will also seinen angegebenen Ausdruck für die Potenz m als eine Muthmassung annehmen. Kann ich darthun, daraus folge, daß für die nächsthöhere Potenz, deren zweyter Coefficient $\frac{(m+1).m.(m-1)}{1.2.3}$ heissen müsse, so habe ich dargethan, daß der angegebene Ausdruck allgemein für alle Potenzen richtig ist. Man wird nähmlich auf diese Art, von jeder Potenz auf die nächsthöhere schliessen, und der dritte Coefficient jeder Potenz, ist ein Product, aus den drey nach einander folgenden natürlichen Zahlen, darunter der Exponent die grösste ist, mit 1.2.3 dividirt.

Aber wenn der dritte Coefficient für die Potenz m; erwähnter massen angenommen wird, so ist er für die nächsthöhere (123)

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} + \frac{m.(m-1)}{1.2} =$$

$$\frac{m.(m-1)}{1.2}.\left(\frac{m-2}{3}+1\right) = \frac{m.(m-1)}{1.2}.$$

$$\frac{m-2+3}{3} = \frac{(m+1).m.(m-1)}{1.2.3}.$$

Also folgt aus der Voraussetzung, daß der dritte Coefficient der nächsthöhern Potenz auf eben die Art durch ihren Exponenten ausgedruckt wird, wie der dritte Coefficient der nächstniedrigern durch den ihrigen, und also ist der anfangs dieses Absatzes angenommene Ausdruck, für jeden Exponenten richtig.

132. Zus. Nimmt man für den vierten Coefficienten einer Potenz; $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$ an, so ist der vierte der nächsthöhern, das nun Angenommene, zu dem dritten der niedrigen addirt, oder er ist $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$.

$$\left(\frac{m-3}{4}+1\right) = \frac{(m+1).m.(m-1).(m-2)}{1.2.3.4}$$

ein Ausdruck, in den sich der angenommene verwandelt, wenn man $m+1$ statt m setzt. Ist also der angenommene Ausdruck für eine Potenz richtig, so ist er auch für die nächsthöhere richtig. Ist nähmlich der vierte Coefficient für eine Potenz ein Product aus den vier nach einander folgen-

genden natürlichen Zahlen, darunter ihr Exponent die gröſste iſt, durch 1. 2. 3. 4 dividirt, ſo iſt der vierte Coefficient der nächſthöhern auch ein Product aus den nach einander folgenden vier natürlichen Zahlen, darunter ihr Exponent die gröſste iſt, durch 1. 2. 3. 4 dividirt. Aber jene Vorausſetzung gilt für jede Potenz in der Tafel (117) z. E. für die fünfte, und alſo gilt die Folge für die 6te; und daher die Vorausſetzung für die ſechste und die Folge für die 7te u. ſ. w.

133. Zuſ. Die erſten vier Coefficienten haben das gemein: Jeder iſt ein Quotient, deſſen Dividendus ein Product aus ſoviel nach einander folgenden natürlichen Zahlen iſt, ſo viel Einheiten die Zahl hat, welche die Stelle des Coefficienten angeigt, z. E. aus 4 beym vierten; die gröſste unter ihnen iſt der Exponent, und die kleinſte iſt alſo der Exponent, um die Zahl der Stelle des Coefficienten weniger eins, vermindert; der Diviſor iſt ein Product aus eben ſoviel natürlichen Zahlen, unter denen 1 die erſte, und folglich die Zahl der Stelle des Coefficienten die letzte iſt.

134. Zuſ. Dieſes Geſetz mit Buchſtaben ausgedruckt, gibt den $(n+1)$ten Coefficienten (125) der Potenz m; oder (117)

$$Q = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots.(m-n+1).(m-n)}{1.2.3\ldots\ldots.(n-1).n.(n+1)}$$

135.

135. Zuſ. Drückt man den nächſtvorhergehenden, P, auch nach dem Geſetze (133) aus, ſo wird $Q = P.\frac{(m-n)}{n+1}$.

136. Zuſ. Aus (123) wird der $(n+1)$te Coefficient der $(m+1)$ten Potenz (119) $Q+P = \left(\frac{m-n}{n+1}+1\right)$, $P =$

$$\frac{(m+1).m.(m-1)....(m-n+2).(m-n+1)}{1.2.3.....n.(n+1)}$$

137. Zuſ. Eben dieſen Ausdruck aber wird man auch bekommen, wenn man $m+1$ ſtatt m in dem Werthe von Q (134) ſchreibt. Alſo gibt die Multiplication, vermittelſt welcher die höhere Potenz aus der nächſtniedrigern erhalten wird, für der höhern Potenz unbeſtimmten $(n+1)$ten Coefficienten eben das, was man bekömmt, wenn man in dem $(n+1)$ten Coefficienten der niedrigern, ſtatt des Exponenten dieſer niedrigern, durchgängig dieſen um 1 vermehrten Exponenten ſchreibt. Man nahm von Q, dem $n+1$ten Coefficienten der niedrigen Potenz das Geſetz an, welches man bey den erſten vier Coefficienten gefunden hatte (133. 134.) und daraus folgt eben dieſes Geſetz auch für $Q+P$, den $n+1$ten Coefficienten der höhern, welcher durch ihren Exponenten ſo beſtimmt wird wie jene durch den Exponenten der niedrigen. Wenn alſo das (133) angenommene Geſetz des unbeſtimmten $(n+1)$-

ten Coefficienten für eine Potenz richtig ist, so ist es auch für die nächst höhere richtig.

138. Zus. Aber es ist für jede der Potenzen in der Tafel richtig. Man setze z. E. $m = 10$, so ist aus (134) der Ausdruck eines unbestimmten $(n+1)$ten Coefficienten der 10. Potenz $\frac{10.9.8.\ldots.10-n}{1.2.3.\ldots.n+1}$. In selbigen nach und nach 0; 1; 2; .... 9 gesetzt, gibt den ersten, zweyten, dritten .... zehnten Coefficienten. Z. E. der vierte wird $\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$.

139. Zus. Weil also dieses Gesetz (133) jeden Coefficienten der zehnten Potenz enthält, so enthält es auch jeden der 11ten (137) und weil es jeden der 11ten enthält, so enthält es jeden der 12ten, u. s. f. ohne Ende.

140. Zus. Die Ausdrückungen für Q; P; (134. 135) sind für jeden Exponenten richtig, daß man an die Stelle von m, was für eine ganze positive Zahl man will, schreiben darf.

141. Lehrs. Für jeden ganzen bejahten Exponenten, ist

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.\ldots.n}a^{m-n}b^n$$
$$+ \frac{P.(m-n)}{n+1}.a^{m-n-1}b^{n+1}\ldots.$$
$$\ldots.. + b^m$$

Der Beweis erhellt für die Exponenten aus (120) für die Coefficienten aus (140) wie jeder Coefficient in der Reihe durch seinen nächstvorhergehenden ausgedrückt wird, aus (135).

142. Zus. Wenn unter den folgenden Gliedern (121) das dessen Coefficient P ist π, das nächste nach ihm ϱ, heißt, so ist $\varrho = \frac{m-n}{n+1}.\pi.\frac{b}{a}$.

143. Zus. Man setze in der Reihe (141) 1; e; statt a; b; so erhält man eine Reihe für

$$(1+e)^m = 1 + me + \frac{m.(m-1)}{1.2}e^2 \ldots.$$

144. Zus. Weil $(a+b)^m = \left(a.(1+\frac{b}{a})\right)^m$
$= a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ (20) so erhält man $(a+b)^m$ aus der Reihe (143) wenn man $e = \frac{b}{a}$ setzt,

und jedes Glied dieser Reihe mit a^m multiplicirt.

145. Zus. Für $n = m+1$ wird der $m+1$te Coefficient $= \frac{m.(m-1)\ldots(m-m-1+1)}{1.2\ldots.m+1}$ $= 0$ und weil jeder folgende ein Product aus dem vorhergehenden in einen Quotienten ist, dessen Divisor nach der Ordnung nun $m+2$; $m+3$; u. s. w. seyn wird, so werden die folgenden alle auch $= 0$; das ist, der mte ist der letzte, und die Reihe bricht also da ab (nach 122).

146. Anm. Dieser Satz (141) heisst von der zweytheilichten Wurzel, (binomio) theorema binomiale: Insgemein wird Newton für seinen Erfinder angegeben, wiewohl von Joh. Bernoulli, Op. T. IV. p. 173. Pascal als der erste Erfinder genannt wird. Man sehe auch Commercium epistolic. Io. Collins cet. p. 67. Die Erfindung kann jemanden unter diesen Neuern nur in Absicht auf einen allgemeinen Ausdruck der Coefficienten zugeschrieben werden, vermittelst dessen man jeden Coefficienten für jede Potenz auser der Ordnung finden kann, ohne die Coefficienten für alle vorhergehende Potenzen gefunden zu haben. Denn sonst trifft man diese Coefficienten, und das Gesetz ihrer Fortsetzung durch die Addition, in ältern Büchern an, z. E. beym Clavius Geom. Pract. L. VI. Prop. 19. aber es fehlt da an solchen Formeln, oder ihnen gleichgültigen Regeln, wie 131; 132; 140;

lehren.

lehren. Die Coefficienten sind die sogenannten numeri figurati, von denen Jac. Bernoulli Arti Coniect. P. II. c. 3. die allgemeinen Formeln zuerst erwiesen hat, welcher auch daselbst P. II. c. 8. zeigt, wie der binomische Lehrsatz dadurch kann gefunden werden.

147. Anm. Am häufigsten wendet man die Formel (141) so an, daß m einen Bruch oder eine verneinte Zahl bedeutet. Aber der gegebene Beweis, der sich auf die Multiplication gründet, rechtfertiget dieses nicht. Es soll unten geschehen.

148. Zus. Wenn b verneint ist, so werden alle Potenzen desselben von ungeraden Exponenten verneint (31), daher werden für $(a-b)^m$ das zweyte, vierte, sechste, und so alle geraden Glieder der Reihe (141) verneint, oder es ist aus (143) $(1-e)^m = 1 - me + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 - \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} e^2$ u. s. w.

149. Zus. Weil nun für $e = 1$; diese Reihe $= 0$ seyn muß, so muß die Summe der verneinten Glieder, das ist, der ungeraden Coefficienten (125) der Summe der bejahten Glieder, d. i. 1 mit den geraden Coefficienten gleich seyn.

So ist für die zehnte Potenz

$1 + 10 + 120 + 252 + 120 + 10 = 1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1$

150. Zuſ. Den $(m-n)$ten Coefficienten zu finden, muß man in P (141) $m-n$ ſtatt n ſetzen, ſo iſt er $S = \frac{m.(m-1)\ldots.(n+1)}{1.2\ldots.m+n}$. Nun ſey $m > 2n$ ſo iſt $m-n+1 > n+1$; alſo $S =$

$$\frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1).(m-n)\ldots.(n+1)}{1.2.\ldots\ldots n.(n+1)\ldots m-n} = \frac{m.(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} = P.$$

Aber der Coefficient, welcher vom Anfang gezählt, der $(m-n)$te iſt, iſt vom Ende gezählt, der $(n+1)$te, oder er gehört zu dem Gliede, das vom Ende gezählt das $(n+1)$te iſt: Und der Coefficient, welcher vom Anfange gezählt der nte iſt, gehört zum $(n+1)$ten Gliede, wenn man die Glieder nach (121) zählt. Folglich gehören zu Gliedern, die von den äuſerſten gleich weit abſtehen, einerley Coefficienten. Dieſes lieſſe ſich ſchon daraus ſchlieſſen, weil einerley herauskommen muß, ob man die Potenz von $a+b$ oder von $b+a$ macht, d. i. ob man die Reihe (141) vorwärts oder rückwärts lieſt.

151. Zuſ. Alſo iſt $(a+b+c)^m = ((a+b)+c)^m$; Man kann nähmlich die erſten beyden Theile als einen anſehen, und dadurch die dreytheilichte Wurzel in eine zweytheilichte verwandeln (wie Arithm. IV. 8. 35.), dieſes gibt die Potenz der dreytheilichten Wurzel $(a+b)^m + m.(a+b)^{m-1}c \ldots$.

wo

wo man, wenn es nöthig ist, die Reihe für die Potenzen der Summe der beyden ersten Theile ausführlich hinschreiben kann.

152. Zus. So läßt sich die Potenz einer viertheilichten Wurzel, u. s. f. finden. Wenigstens kann man hiervon soviel Glieder nach der Ordnung, als man braucht, berechnen. Ob sich aber ein allgemeines Gesetz werde finden lassen, nach dem sich alle diese Potenzen richten, das läßt sich hier nicht so leicht ausmachen. Ich zeige es, Anal. des Unendlichen (56).

Geometrische Aufgaben.

153. Aufg. Die Verhältniß der Seite AB eines gleichseitigen Dreyecks ABC 1. Fig. zum Halbmesser KA des Kreises zu finden, in dem es beschrieben ist.

Aufl. Der Bogen ADB ist 120 Gr. (Geom. 23. S. 2. Zus.). Man fälle KED senkrecht auf AB; so ist DKA = 60°; und AE = $\frac{1}{2}$AB (G. 22. S. 2. Zus.). Auch AD = AK = DK (G. 23. S. 5. Zus.) folglich DE = EK (G. 9. S. 5. Zus.) = $\frac{1}{2}$AD; also $AE^2 = AD^2 - DE^2$ (G. 15. Satz). Es heisse der Halbmesser = r; die gesuchte Seite = x so ist AE = $\frac{1}{2}$x und $AE^2 = \frac{1}{4}x^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3r^2}{4}$ oder $x^2 = 3r^2$ also $x = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$ (24) = r. 1,7320508. (Arithm. IV. 27.).

Offenbahr verlangt man hie nicht die **Verzeichnung** des Dreyecks im Kreise, die giebt sich sogleich aus dem Sechsecke, sondern die **Berechnung** wie sich diese Seite zum Halbmesser verhält. So auch in den folgenden.

154 Zus. $AE = r.0,8660254$. Es ist aber sin tot: sin $60^\circ = 1 : AE$ (Trig. 2. Erkl.) oder $AE = \frac{r. \sin 60^\circ}{\sin tot}$; Nimmt man also r von so viel Theilen an, als der Sinustotus der Tafeln hat, so wird AE der Sinus von 60 Gr. wie er in den Tafeln steht; z. E. hier 8660254 wenn $r = 10\,000\,000$.

155. **Anm.** Aus f der Seite eines Vielecks von n Seiten, findet sich z die Seite des Vielecks von 2n Seiten (Geom. 43. S.) $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f2)}$ folglich $2r(\sqrt{rr - \frac{1}{4}f^2}) = 2r^2 - z^2$ und auf beyden Seiten quadrirt $4r^4 - r^2 f2 = 4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4$ oder $4r^2 z^2 - z^4 = r^2 f^2$ oder $z \frac{\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{r} = f$, welches dient aus der Seite eines Vielecks von 2n Seiten die Seite des von n Seiten zu finden.

Setzte man $z = r$; so fände man hieraus sogleich f; die Seite des Dreyecks.

156. **Aufg.** Die Verhältniß der Seite des Zehnecks $AB = x$ z. F. zum Halbmesser $AK = r$ zu finden.

Aufl. I. Man verlängere die Seite, so ist, wenn man KD nach Gefallen zieht; BKD + BDK = ABK (Geom. 13. S. 1. Zus.). Hier nun ist AKB = $\frac{4R}{10} = \frac{2R}{5}$ also ABK = $\frac{4R}{5}$ (Geom. 13. S. 5. Zus.) = 2. AKB; Nimmt man also BD = BK; so ist BKD = BDK = AKB und wegen des gemeinschaftlichen Winkels bey A; Δ ABK $\sim$ Δ AKD (Geom. 27. S.). (Ich nenne die Spitzen der Dreyecke in der Ordnung, wie an jeder gleiche Winkel in ihrem Dreyecke stehen, z. E. der Winkel K im Dreyecke ABK; ist dem Winkel D im Dreyecke AKD gleich.) Also AK: AB = AD: AK; oder r: x = r + x: r.

II. Die beyden mittlern Glieder der Proportion sind unbekannt, man hat aber ihren Unterschied = r.

Die Erinnerungen (77) veranlassen also der beyden unbekannten Grössen Summe zu suchen, u = r + 2x; daraus x = $\frac{1}{2}$u − $\frac{1}{2}$r. Folglich r: $\frac{1}{2}$u − $\frac{1}{2}$r = $\frac{1}{2}$u + $\frac{1}{2}$r: r. Daraus kömmt $r^2 = \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}r^2$ und $u^2 = 5r^2$, folglich x = $\frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r$.

III. Nähme man u = $-\sqrt{5r^2}$; so käme x = $-\frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r$. Offenbar aber versteht man unter x, r, r + x, r + 2x bejahte Grössen, und wenn man die letzte aus ihrem

Quadrate findet, so sieht man solches als Quadrat einer bejahten Grösse an, nicht einer verneinten.

IV. Die beyden Werthe von x; (II; III) findet man aus der unreinen quadratischen Gleichung $x^2 + r.x = r^2$, wenn man solche nach (78) auflöset. Ich vermeide dieselbe wenn ich statt der beyden unterschiedenen unbekannten Grössen eine einzige suche, von der ich zugleich weiß daß sie bejaht ist.

V. Soll in einem gleichschenklichten Dreyecke der Winkel an der Grundlinie noch einmahl so groß seyn als der an der Spitze, also $A = 2.AKB$; so ist $5.AKB = 2R$, und $AKB = \frac{2}{5}R$ wie in (I). Jedes Dreyeck also, wo dieses Verhalten zwischen den Winkeln statt findet, ist dem hie gebrauchten, ähnlich.

Eine Bemerkung wenn ein solches Dreyeck durch analytische Trigonometrie gesucht würde, in meinen geometrischen Abhandl. II. Samml. n. 28. §. 90. 371 Seite.

VI. Verzeichnung (constructio) 3. Fig. Man ziehe $CG = r$, und senkrecht darauf $CF = \frac{1}{2}r$; so ist $FG = \sqrt{\frac{1}{4}r^2}$, (Geom. 15. S.) damit den Bogen GH beschrieben, hat man $CH = x$ (I).

VII. Wäre die Seite des Zehnecks $= x$ gegeben, so fände sich aus (IV) der Halbmesser des Kreises in den es sich beschreiben läßt, $r = \frac{1}{2}x.(1+\sqrt{5})$. Er soll bejaht seyn, deßwegen braucht

braucht man das Zeichen — vor der Wurzel nicht.

157. I. Ohne an das Zehneck zu denken, stelle man sich vor, eine gegebene ganze Linie, AB 2. Fig. soll in B so getheilt werden daß DA: DB = DB: BA. Begreiflich ist DB das gröſſere der beyden Stücken, und das kleinere BA ist die dritte Proportionallinie zur ganzen und dem gröſſern Stücke. Auch das Quadrat des gröſsern, so groß als das Rechteck unter der ganzen und dem kleinern.

II. Die ganze Linie heisse = a; das gröſſere Stück = y; so ist a: y = y: a − y, daher $y^2 = -ay + a^2$ und $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a.(\sqrt{5}-1) = a.\,0{,}6180340$ das kleinere Stück $= \frac{1}{2}a.(3-\sqrt{5})$.

III. Ist in 3. Fig. CG = a; $CF = \frac{1}{2}a$ so ist y = FG — FC.

IV. Euklid VI. B. 3. Erkl. sagt dieß heisse: ἀκρον και μεσον λογον εὐθειαν τετμηθαι; recta linea extrema et media ratione secta. Er lehrt schon in des 2. B. 11. Satze eine gerade Linie so schneiden daß Rechteck und Quadrat (1) gleich sind, und im 30. Satze des 6. B. die Sache dem angeführten Ausdrucke gemäß bewerkstelligen.

V. Im 10. S. des IV. B. braucht er des 2. B. 11. Satz, ein Dreyeck zu verzeichnen dessen Winkel an der Grundlinie noch einmahl so groß ist, als der an der Spitze (156; V.) und daraus, in einem gegebenen Kreise, ein ordentliches

r^2, und $r^2 f^2 = z^2$. $(4r^2 - z^2) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. r^4; Das Product der beyden Zähler, ist $\left.\begin{matrix} 15-5 \\ -5+3 \end{matrix}\right\} \sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5}$; Daher, $f^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. r^2 oder $f = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Es ist auch $f^2 - r^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. $r^2 = x^2$; oder die Quadrate des Halbmessers und der Seite des Zehnecks, machen zusammen das Quadrat der Seite des Fünfecks; Daher ist in der 3. Fig. eine gerade Linie von H bis G; die Seite des Fünfecks.

Man hat auch hieraus den Sinus von 36 Gr. $= \frac{1}{2} f$.

Ferner das Quadrat des Cosinus von 36 Graden $= r^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\right)$. Das was in das Quadrat des Sinustotus multiplic. ist, beträgt $\frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$.

Der Zähler dieses Ausdrucks ist das Quadrat von $1+\sqrt{5}$. So kömmt endlich der Cosinus von 36 Graden, oder der Sinus von 54 Graden $= r. \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = \sin 18° + \sin 30°$ (158).

160.

160. Aufg. **Die Seite des Achtecks in einem gegebenen Kreiſe zu finden.**

Auflſ. Die Seite des Vierecks iſt $r\sqrt{2} = f$ (155) alſo daſelbſt $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{2}r^2)} = 2r^2 \cdot (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$.

161. Zuſ. Man kann alſo aus 153; 155; 156; 159; 160; die Vielecke von 3; 6; 12; 24; u. ſ. f. von 4; 8; 16; 32; u. ſ. f. von 5; 10; 20; u. ſ. f. Seiten in den Kreis beſchreiben, und ihre Seiten durch den Halbmeſſer berechnen.

162. Zuſ. Daraus geben ſich für die halben Mittelpunktswinkel (Geom. 23. Satz 3. Zuſ.) dieſer Vielecke Sinus und Coſinus.

163. Aufg. **Wenn BP = k, DT = c; die parallelen Sehnen zweener Bogen BAP; DAT; gegeben ſind, daraus DGK die Sehne ihres Unterſchiedes DBK zu finden, die h heiſſen ſoll 4. Fig.**

Auflſ. $BE = \frac{1}{2}k$; $DF = \frac{1}{2}c$ ſind die Sinus der Hälften der Bogen BAP; DAT; und DG iſt der Sinus ihres halben Unterſchiedes. Zwiſchen dieſen drey Sinuſſen hat man die Vergleichung Trigon. 19. S. gefunden. Nun iſt DAT $-$ BAP $=$ BD $+$ PT $=$ 2BD; und alſo der Bogen, zu denen die Chorden gehören, Unterſchied noch einmahl ſo groß als der Unterſchied der Bogen, zu denen die Sinus gehören, folglich DG der Sinus des halben Unterſchiedes der Bogen, zu denen die Sehnen gehören, und alſo $2DG = h$. Man ſetze alſo a. a. O. der Trigonometrie $f = \frac{1}{2}c$;

$\frac{1}{2}c$; $m = \frac{1}{2}k$; $d = \frac{1}{2}h$; so wird $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}c \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)} - \frac{1}{2}k \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$: r also

$$h = c\,\frac{\sqrt{(4r^2 - k^2)} - k\sqrt{(4r^2 - c^2)}}{2r}.$$

164. Zus. Eben so findet man aus Trigon. 19. S. II. die Sehne der Summe

$$c = h\,\frac{\sqrt{(4r^2 - k^2)} + k\sqrt{(4r^2 - h^2)}}{2r}.$$

165. Zus. Wenn 5. Fig. der Bogen HAL $= \frac{1}{2}$HLM; so setze man in (163) $h = k =$ HL; $c =$ HM; Man sieht nähmlich den Bogen HAL als den Unterschied des Bogens HLM und eines, der so groß als HAL ist, an. Dieses gibt, wenn $r = 1$ gesetzt wird, (Trig. 19. S. Anm.) $2h = c\sqrt{(4 - h^2)} - h\sqrt{(4 - c^2)}$ also $h.(2 + \sqrt{(4 - c^2)}) = c\sqrt{(4 - h^2)}$ wenn man auf beyden Seiten quadrirt, so findet man endlich $h^2 = \frac{c^2}{2 + \sqrt{(4 - c^2)}}$ für h die Sehne des halben Bogens, wenn c die Sehne des ganzen gegeben ist.

166. Zus. Weil der doppelte Bogen die Summe zweener einfachen ist, so setze man in (164) $h = k$; $r = 1$; dieses gibt $c = h\sqrt{(4 - h^2)}$ die Sehne des doppelten Bogens durch die Sehne des einfachen.

167. Zus. Man suche h in (166) nähmlich $c^2 = 4h^2 - h^4$ oder $h^4 = 4h^2 - c^2$ folglich (78) $h^2 = 2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}$. Dieses gibt zweene

zweene verschiedene Werthe für das Quadrat der Sehne h des einfachen Bogens aus der Sehne c; des doppelten Bogens. Nähmlich die Sehne HM 5. Fig. gehört zugleich zu den Bogen HLM und HNM; den Bogen also, dessen Sehne HM ist, halbiren, heisst jeden der genannten Bogen halbiren; wenn aber HLM $= \omega$; der Umfang HLMNH $= P$ so sind die beyden Bogen, zu denen die Sehne HM gehört; ω; $P - \omega$; also ihre Hälften $H\lambda L = \frac{1}{2}\omega$; $H\nu N = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\omega$ die nähmlich zusammen $\frac{1}{2}P$ ausmachen. Folglich gehören die beyden Werthe von h^2 für die beyden Quadrate der Sehnen HL; HN; Wenn nun $\omega < \frac{1}{2}P$ so ist $\frac{1}{2}\omega < \frac{1}{4}P$; aber $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\omega > \frac{1}{4}P$ folglich die Sehne HL < HN; In diesem Falle also, wenn der kleinste Bogen, zu dem die Sehne c gehört, kleiner als ein Halbkreis ist, ist das Quadrat der Sehne der Hälfte dieses Bogens $= 2 - \sqrt{(4 - c^2)}$ und $2 + \sqrt{(4 - c^2)}$ das Quadrat der Sehne der Hälfte seiner Ergänzung zu P; In dem entgegengesetzten Falle wird es sich umgekehrt verhalten.

168. Anm. Diese Zweydeutigkeit, vermöge welcher h sowohl HL als HN bedeuten kann, ward dem Scheine nach in (165) vermieden, sie ist aber in der That auch dort zu finden, weil man die Wurzelgrösse im Divisor so wohl bejaht als verneint ansehen kann (32).

169. Anm. Wenn man in (165) im Nenner das Zeichen $\pm$ vor die Wurzel setzt, und nun

Zähler und Nenner mit $2 \mp \sqrt{(4 - c^2)}$ multiplicirt, so kömmt $h^2 = \frac{c^2 \cdot (2 \mp \sqrt{(4 - c^2)})}{4 - 4 + c^2}$

Das ist das Quadrat der Sehne des einfachen Bogens aus der Sehne des doppelten, wie in (167) nur kömmt in (167) $\mp$ wenn in (169) $\pm$ steht. Die Bedeutung beyder Zeichen ist in (167) erklärt.

170. Anm. Man kann auf eben die Art den Sinus oder die Tangente des halben Bogens aus Trigon. 19. S. suchen, und findet eben die Zweydeutigkeiten (167).

171. Zus. Durch Wiederhohlung der Arbeit (167) berechnet man die Sehnen für $\frac{1}{4}\omega$; $\frac{1}{8}\omega$; u. s. w. oder für alle Theile, die sich durch Halbiren finden lassen, daß uns also hier die Algebra so weit führt als die gemeine Geometrie (Geom. 5. S. Zus.).

172. Zus. Hat man die Seiten zweyer ordentlicher Vielecke von m; und von n; Winkeln; d. i. hat man die Sehnen von $\frac{1}{m}$ P und $\frac{1}{n}$ P; so findet man aus (163) die Sehne von $\frac{m - n}{mn}$ P; Ist nun $m - n$ eine Potenz der 2; so findet man aus (171) die Sehne von $\frac{1}{mn}$ P d. i. die Seite des Vielecks, das mn Winkel hat.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Es sey $m = 5$; $n = 3$; so findet man aus den Seiten des Fünfecks und des Dreyeckes (159; 153;) die Sehne von $\frac{2}{15}$ P; und durch deren Halbirung die Seite des Funfzehnecks. S. Clau. Schol. ad Eucl. 16. IV. Wenn man aus (164) die Sehne der Summe von $\frac{1}{3}$P + $\frac{1}{5}$P d. i. von $\frac{8}{15}$P suchte, so käme man durch dreymahliges Halbiren auch auf das Funfzehneck.

173. I. Aus dem bisher gewiesenen, sind die grössten Vielecke, die sich geometrisch verzeichnen lassen, und deren Seiten, durch quadratische Gleichungen, oder unmittelbar durch den Halbmesser selbst gegeben sind; Dreyeck, Viereck, Fünfeck, Sechseck. Das ist, man hat durch quadratische Gleichungen, oder den Halbmesser selbst, die Sehnen von 120; 90; 72; 60; Graden.

II. Folglich eben so die Sehnen der Hälften, Viertheile u. s. w. dieser Bogen. Die ersten Halbirungen der genannten, geben 60; 45; 36; 30; die zweyten 30; $22\frac{1}{2}$; 18; 15; die dritten 15; $11\frac{1}{4}$; 9; $7\frac{1}{2}$.

Hie kömmt schon ein Bogen mehr als einmahl vor, die dritten Halbirungen geben ungerade Zahlen, oder nicht einmahl ganze, durch ihre Fortsetzung kömmt man also nicht auf einen Grad.

III. Nun subtrahire man in (I) erst jeden der drey kleinern Bogen vom grössten, dann jeden der beyden kleinsten, vom nächsten nach dem

gröſſten, endlich, den kleinſten vom nächſt gröſſern. Die Unterſchiede ſind 30; 48; 60; 18; 30; 12. Dieſer Unterſchiede Hälften: 15; 24; 30; 9; 15; 6; davon die Hälften $7\frac{1}{2}$; 12; 15; $4\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$; 3; darunter iſt nur eine einzige gerade Zahl, deren Hälfte ſchon unter den erſten Hälften vorkam. So führen Halbirungen der Unterſchiede, auch nicht auf einen einzigen Grad.

IV. Man kann auch Summen der genannten Bogen nehmen. Immer wird man finden daß fortgeſetzte Halbirungen bey ihnen nie auf einen einzigen Grad führen.

V. Indeſſen iſt begreiflich, daß fortgeſetzte Halbirungen, auf etwas führen daß nicht viel mehr als ein Grad beträgt, auch etwas das ein wenig kleiner als ein Grad iſt, auf Gränzen zwiſchen die der Grad fällt, die man auch durch gehörige Wahl und Behandlung der Bogen enger zuſammen bringen wird. Alſo lieſſe ſich ſo etwas finden, das man ohne groſſen Fehler für die Sehne eines Grades annehmen dürfte. Und ſo könnte man auch auf Theile des Grades fortgehen.

VI. Ein ſolches Verfahren brauchte Ptolemäus, trigonometriſche Sehnentafeln zu berechnen. In meiner geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 28. Abhandl. iſt es dargeſtellt.

VII. Sehnen von $51\frac{3}{7}$; von 40 Graden, d. i. Seiten des Siebenecks, des Neuecks, und d. gl. finden ſich nicht durch quadratiſche Gleichun-

chungen, und solche Vielecke lassen sich in den Kreis nicht durch die Elementargeometrie beschreiben. Davon wird weiter unten geredet.

174. Aufg. Aus der gegebenen Seite eines ordentlichen Vielecks den Halbmesser des Kreises zu finden, darin es sich beschreiben lässt.

Aufl. Man darf nur in der Gleichung, welche die Seite des Vielecks durch den Halbmesser gibt, diesen als die gesuchte Grösse, jene als die gegebenen ansehen.

Ex. In (156) ist $\frac{2x}{\sqrt{5}-1} = r$.

175. Aufg. Wenn der Sinus a; und Cosinus b; des einfachen Winkels, für den Halbmesser $= 1$ gegeben sind, daraus die Sinus und Cosinus der vielfachen zu finden.

Aufl. Die Vielfachen entstehen, wenn man das Einfache immer zu sich selbst addirt. Also sey in Trigon. 19. S. allemahl $d = a$; $\delta = b$; Ferner für das doppelte; $m = a$; $\mu = b$; also des doppelten; Sinus $= 2ab$; Cosinus $= b^2 - a^2$ (das. 2. Zus.). Nun setze man statt m und μ, den Sinus und Cosinus des doppelten, so hat man des dreyfachen; Sinus $a(b^2 - a^2) + b.2ab = 3ab^2 - a^3$; Cosinus $= (b^2 - a^2).b - 2ab.a = b^3 - 3a^2b$; Wiederum diese beyden statt m; μ; gebraucht, geben des vierfachen Sinus $(b^3 - 3a^2b).a + (3ab^2 - a^3).b =$

$b = 4ab^3 - 4a^3b$; Cosinus $= (b^2 - 3a^2b)$. $b - (3ab^2 - a^3)$. $a = b^4 - 6a^2b^2 + a^4$; dieſe ſtatt m und μ gebraucht, geben des fünffachen Sinus $= (4ab^3 - 4a^3b)$. $b + (b^4 - 6a^2b^2 + a^4)$. $a = 5ab^4 - 10a^3b^2 + a^5$; Coſinus $= (b^4 - 6a^2b^2 + a^4)$ $b - (4ab^3 - 4a^3b)$. $a = b^5 - 10a^2b^3 + 5a^4b$; u. ſ. w.

176. Zuſ. Die hier wirklich berechneten Sinus und Coſinus beobachten folgendes Geſetz: Wenn man $b + a$ auf die Potenz erhebt, deren Exponent das Vielfache des Winkels anzeigt, und ſich um die Zeichen der Glieder dieſer Potenz nicht bekümmert, ſondern nur auf ihre Gröſſen acht gibt, ſo enthält der Sinus das zweyte, vierte, ſechste, u. ſ. f. Glied dieſer Potenz, und der Coſinus, das erſte, dritte, fünfte, u. ſ. w. Jener die geraden, dieſer die ungeraden. Die Zeichen aber der Glieder wechſeln in jeder Reihe für den Sinus und für den Coſinus ab, ſo daß das erſte bejaht iſt.

Zum Exempel dient die fünfte Potenz von $b + a$ die man in 116. findet, wenn man die dortige Reihe mit dem Sinus und Coſinus des fünffachen Winkels vergliche.

177. Zuſ. Man mache $(b + a)^n$ nach dem Binomiſchen Lehrſatze (141) man verwechſele nähmlich dorten a; und b; und ſetze hier n ſtatt des dortigen m; ferner 4r ſtatt des dortigen n; daß alſo P den Coefficienten bedeute, deſſen Zahl 4r; ſich zweymahl mit 2 dividiren läſſt, (numerus

mierus pariter par) ferner seyn Q; R; S; T; die nächstfolgenden Coefficienten, da die Zahl von R nähmlich 4r + 2 sich nur einmahl mit 2 dividiren läßt; und A; B; C; D; u. s. w. seyn die Coefficienten von Anfange, nähmlich $A = n$; $B = \frac{n.(n-1)}{1.2}$; $C = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$ u. s. w. so gibt das (176) bemerkte Gesetze, wenn es allgemein ausgedruckt wird, für den nfachen Winkel

den Cosinus $= b^n - B b a^{n-2} + D b a^{n-4} \ldots . + P b a^{n-4r} - R b a^{n-4r-2} = \mu$

den Sinus $= A b a^{n-1} - C b a^{n-3} + E b a^{n-5} \ldots . + Q b a^{n-4r-1} - S b a^{n-4r-3} = m$

Hieraus folgt für den (n + 1) fachen Winkel $b\mu - am$ als der

Cosinus $= b^{n+1} - (A+B) b a^{n-1} + (C+D) b a^{n-3} \ldots . - (Q+R) b a^{n-4r-1} + (S+T) b a^{n-4r-3} \ldots$

dergleichen $a\mu + bm$ als der

Sinus $= (A+1) b a^{n} - (B+C) b a^{n-2} \ldots + (P+Q) b a^{n-4r} - (R+S) b a^{n-4r-2} \ldots .$

Aber aus (136) ist A + B; C + D; Q + R; S + T; der zweyte, vierte, 4r + 2te, 4r + 4te

Coefficient der Potenz $n+1$; wie B; D; R; T; der zweyte, vierte, $4r+2$te, $4r+4$te; der Potenz n waren; wenn also das Gesetz für den Cosinus des n fachen Winkels angenommen wird, so folgt es für den Cosinus des $n+1$ fachen. Eben so folgt es für dieses Sinus aus dem Sinus für jenen, denn $A+1$; $B+C$; $P+Q$; $R+S$; und A; C; Q; S; sind der 1; 3; $4r+1$; $4r+3$; Coefficient, jene für die Potenz $n+1$ diese für n. Da also das angenommene Gesetz wahr ist, wenn $n=2$; 3; 4; 5; gesetzt wird, so ist es für alle Vielfache wahr, nach der Art zu schliessen, die (139) gebraucht worden.

178. Anm. Aus Trigon. 19. S. 3. Zus. lassen sich auf diese Art auch die Tangenten der vielfachen Winkel finden, und man kann ihr allgemeines Gesetz bestimmen, welches sich noch leichter durch die Integralrechnung thun lässt, Anal. des Unendl. 331.

Von den unbestimmten Aufgaben.

179. Erkl. Eine Aufgabe heisst unbestimmt, wenn die Gleichung, dadurch sie aufgelöset wird, zwo oder mehr unbekannte Grössen enthält (70).

180. Zus. Wenn die Gleichung zwo unbekannte Grössen enthält, so kann man eine nach Gefallen annehmen, und jeder Werth, den man für dieselbe annimmt, bestimmt einen oder vielleicht mehr Werthe der andern; daß also die andere

dree nicht nur einen Werth, oder eine gewisse Menge von Werthen, sondern unzählich viele, eine ganze Reihe von Werthen haben kann, die durch die Reihe von Werthen, welche die erste Grösse bekömmt, bestimmt wird.

Ex. Es sey $y = 2x^2 - 5$; so ist für

$x = -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4 \ldots$

$y = +13; +3; -3; -5; -3; +3; +13; +27 \ldots$

181. Zus. Enthält die Gleichung drey unbekannte Grössen, x; y; z; so gibt eine nach Gefallen angenommen, eine Gleichung wie (180) und also gibt die Reihe der Werthe von z; eine Reihe von Gleichungen wie die in 180.

Ex. $y = 2x^2 - z$; gibt für

$z = 0; +3; +5 \ldots$

$y = 2x^2; 2x^2 - 3; 2x^2 - 5 \ldots$

182. Anm. Exempel von unbestimmten Aufgaben in der Geometrie, sind: Ein rechtwinklichtes Dreyeck zu machen, dessen Hypotenuse gegeben ist (Geom. 21. S. 1. Zus.) ein Dreyeck zu machen, dessen Grundlinie und Innhalt gegeben sind (Geom. 42. S. 24. Zus.).

Man kann also bey einer solchen Aufgabe noch allerley Bedingungen erfüllen dadurch sie bestimmt wird. Z. E. das rechtwinklichte Dreyeck, gleichschenklich, das dessen Innhalt und Grundlinie gegeben sind rechtwinklicht.

183. Anm. Bey unbestimmten Aufgaben in Zahlen, wird das ganz Unbestimmte, gewöhn-

lich so eingeschränkt, daß die gesuchten Zahlen, ganze, oder wenigstens Rationalzahlen seyn sollen. Der Zustand der Arithmetik bey den Griechen veranlaßte solche Bedürfnisse, sie konnten Brüche wenn Zähler und Nenner etwas groß waren, nur sehr unbequem ausdrucken, für Irrationalzahlen kannten sie unsere Näherungen gar nicht.

Als ältester Schriftsteller über unbestimmte Aufgaben ist Diophantus Alexandrinus bekannt. Von dreyzehn Büchern die er soll verfaßt haben, hat man nur: Rerum Arithmeticarum Libr. sex, von Guil. Xylandro lateinisch übersetzt, Basel 1575. und mit Caspar Bacheti Commentariis 1621. wiederum aufgelegt. Daher heißt die Beschäfftigung mit unbestimmten Aufgaben: Analysis Diophantea.

184. Aufg. Die Umstände zu finden, unter denen in der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$; der Werth der unbekannten Grösse rational ist.

Aufl. Weil $x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac}}{2a}$ (78) so wird dieser Werth rational; wenn das, was unter den Wurzelzeichen steht, ein vollkommenes Quadrat ist. Man setze, es sey das Quadrat von $b - u$ oder es sey $\sqrt{(b^2 - 4ac)} = b - u$ so ist auf beyden Seiten quadrirt, $b^2 - 4ac = b^2 - 2bu + u^2$ oder $-4ac = -2bu + u^2$;

$+u^2$; folglich $b = \frac{u^2+4ac}{2u}$ und $b-u = \frac{4ac-u^2}{2u}$; also $x = \frac{-u^2-4ac\pm(4ac-u^2)}{4au}$

oder die beyden Werthe von x sind $\frac{-u}{2a}$; $\frac{-2c}{u}$;

und die Gleichung muß seyn: $ax^2+\frac{u^2+4ac}{2u}x+c=0$; wo man a; c; u; nach Gefallen annehmen darf, und allemahl einen rationalen Werth für x bekömmt.

Ex. Für $a=5$; $c=\frac{1}{4}$; wird $5x^2+\frac{u^2+5}{2u}x+\frac{1}{4}=0$ wo man statt u was man will setzen kann, und die beyden Werthe der unbekannten Grösse $\frac{-u}{10}$; $-\frac{1}{2u}$ seyn werden. Es sey $u=-1$; so ist $5x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ und die Werthe von x sind $+\frac{1}{10}$; $+\frac{1}{2}$. Die Ursache, warum man für $\sqrt{(b^2-4ac)}$ den Ausdruck $b-u$ annimmt, ist: damit sich das Quadrat von b auf beyden Seiten aufhebt, und also eine Gleichung herauskömmt, da b nur eine Abmessung hat, folglich allemahl rational wird, wenn man u rational annimmt. Dieses gibt also auch $b-u$ rational. Es muß nähmlich b eine solche Rationalzahl seyn, für welche u in der Gleichung $2ub=u^2+4ac$ rational ist. Wollte man b und c nach Gefallen anneh-

nehmen, und daraus u bestimmen, so würde solches nicht allemahl rational werden; also bestimmt man b aus u und c.

185. Aufg. Ein Quadrat zu finden; das von einem gegebenen Quadrate abgezogen, ein Quadrat lässt.

Aufl. Wenn des gegebenen Quadrates Wurzel z heisst, so soll $z^2 - x^2 = y^2$ seyn, wo x; y; beyde unbekannt sind, beyde aber nebst z rational seyn sollen. Nun muß man für y einen solchen Ausdruck annehmen, vermittelst dessen sich x durch eine einfache Gleichung bestimmen lässt. Dergleichen Ausdruck ist y oder $\sqrt{(z^2 - x^2)} = z - px$; denn wenn man quadrirt, so hebt sich z^2 auf beyden Seiten auf, und kömmt $-x^2 = -2pzx + x^2p^2$ wo man durchgängig mit x dividiren kann, und $x = \frac{2pz}{1+p^2}$ bekömmt. Wenn man also hier statt p was für eine Rationalzahl man will, setzt, so bekömmt man für x einen rationalen Werth, und derselbe gibt auch einen rationalen Werth für $y = z.\frac{(1-p^2)}{1+p^2}$. Hier wird y verneint oder bejaht, nachdem p^2 gröſſer oder kleiner als 1 ist. Es ist nähmlich $\pm\sqrt{(z^2 - x^2)} = z - px$; oder man hätte auch setzen können $\sqrt{(z^2 - x^2)} = px - z$ da man denn $y = z.\frac{(p^2-1)}{1+p^2}$ bekommen

men hätte, welches bejaht oder verneint wird, nachdem jener Werth verneint oder bejaht ist.

Ex. Es sey $z = 10$; oder $\sqrt{(100 - x^2)} = y$ so ist $x = \frac{20p}{1+p^2}$; $y = \frac{10.(1-p^2)}{1+p^2}$.

Man nehme $p = \frac{1}{2}$; so wird $x = \frac{10.4}{5} = 8$; $y = \frac{10.\frac{3}{4}.4}{5} = 6 = \sqrt{(100-64)}$. Man nehme $p = 5$; so wird $x = \frac{20.5}{26} = \frac{10}{13}$; $y = \frac{10-24}{26} = -\frac{120}{13} = -\sqrt{(100-(\frac{10}{13})2)}$.

186. Aufg. Wenn in $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$; x gegeben ist, das übrige so zu finden, daß alles rational wird; oder, ein Quadrat zu finden, das zu einem gegebenen Quadrate addirt, ein Quadrat gibt.

Aufl. Man setze $z = u + y$ so wird $u^2 + 2uy + y^2 = x^2 + y^2$ wo sich das Quadrat des gesuchten y auf beyden Seiten aufhebt, und $y = \frac{x^2-u^2}{2u}$; $z = \frac{x^2+u^2}{2u}$ kömmt; Man nimmt hier u nach Gefallen an.

Ex. Wenn $x = 9$; gegeben ist und $u = 1$ angenommen wird, so ist $y = 40$; $z = 41 = \sqrt{(81+1600)}$.

187.

187. Aufg. Zwo ganze Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen das Quadrat der dritten ausmachen.

Aufl. I. Es sey wiederum $x^2 + y^2 = z^2$; wo alle drey Zahlen ganze seyn sollen. Man setze $z + x = a$; $z - x = b$; also $z^2 - x^2 = y^2 = ab$; dieser Gleichung genug zu thun, nehme man $a = ny$; $b = \frac{y}{n}$ wo, damit ny eine ganze Zahl ist, n eine ganze Zahl seyn muß mit der sich y dividiren läßt; Also setze man $y = mn$ wo m eine ganze Zahl bedeutet. Dieses gibt $a = mn^2$; $b = m$; $y = nm$; $x = \frac{a - b}{2}$ (Trig. 13. S.) $= \frac{m.(n^2 - 1)}{2}$; $z = \frac{a + b}{2} = \frac{m.(n^2 + 1)}{2}$ die drey gesuchten Zahlen, werden also durch n; m; bestimmt; welche man so annehmen muß, daß $(n^2 - 1).m$; $(n^2 + 1).m$, gerade werden. Ist also m ungerade, so müssen $n^2 - 1$; $n^2 + 1$ gerade seyn, d. i. n^2 muß ungerade seyn, aber das Quadrat jeder ungeraden Zahl, und nur das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade (37); also muß man in diesem Falle n ungerade nehmen, und man kann statt n, jede ungerade Zahl nehmen. Ist aber m gerade, so mag n gerade oder ungerade seyn.

Erstes Exempel. Man setze $m = 1$; so muß n ungerade seyn, und die drey Zahlen werden

$y =$

$y = n = 1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$

$x = \frac{n^2-1}{2} = 0; 4; 12; 24; 40; 60; \ldots$

$z = \frac{n^2+1}{2} = 1; 5; 13; 25; 41; 61; \ldots$

Zweytes Exempel. Man setze $m = 2$; so wird jede ganze Zahl statt n gebraucht

$y = 2n = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14.$

$x = n^2-1 = 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48.$

$z = n^2+1 = 2; 5; 10; 17; 26; 37; 50.$

II. Zu jeder gegebenen ganzen Zahl y, läßt sich eine andere x; finden, deren Quadrat zu jener Quadrate addirt, das Quadrat einer dritten ganzen Zahl z macht. Die Auflösung der Aufgabe ist in beyden Exempeln enthalten, nachdem die gegebene Zahl ungerade oder gerade ist. Die Erfindung der Regel für das erste Exempel wird dem Pythagoras, der für das zweyte dem Plato zugeschrieben. Clau. Schol. ad Eucl. 47. I. Beyde Exempel zusammen enthalten alle Zahlen, welche der Frage (187) genug thun, weil allemahl eine der beyden, deren Quadrate zusammen addirt werden, entweder gerade oder ungerade seyn muß. Wenn man nähmlich statt m andere Werthe als 1 und 2 setzt, so findet man nur Vielfache solcher Zahlen, wie in den Reihen der Exempel vorkommen, und diese Vielfache müssen also auch in den Reihen selbst, wenn man solche weit genug fortsetzt, vorkommen.

III. Im

III. Im ersten Exempel sey $n = 2r - 1$ so wird $y = 2r + 1$; $x = 2r.(r-1)$ allemahl gerade; $z = 2r.(r-1) + 1$ allemahl ungerade. Im zweyten Exempel sind x und z abwechselnd und allemahl zugleich gerade oder ungerade.

188. Die beyden kleinern Zahlen lassen sich als Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ansehen, dessen Hypotenuse die dritte gäbe. Daher heisst man das, pythagorische Dreyecke in Zahlen. Man kann nächst diesem einfachsten Falle noch viel verwickeltere erdenken, z. E. Product aus den beyden kleinern Zahlen, heisst Billy des Dreyecks doppelte Fläche. Man kann also Bedingungen angeben, welche bey dieser Fläche zu erfüllen sind. Dergleichen wäre, die doppelte Fläche, von jeder Seite abgezogen, soll allemahl Quadratzahlen übrig lassen. Das ist die erste Aufgabe in des Jesuiten Iacob de Billy Buche: Diophanti Redivivi Pars Prior, Lyon, 1670. Der zweyte Theil dieses Buchs enthält unbestimmte Aufgaben die nicht zum rechtwinklichten Dreyecke in erwähnter Bedeutung gehören. Schon 1660. erschien zu Paris eben des Verfassers Diophantus Geometra, wo alle Fragen des Diophantus die sich geometrisch beantworten lassen, algebraisch und geometrisch untersucht werden.

189. I. Man setze $\tang \frac{1}{2} w = \frac{a}{b}$, wo die beyden Buchstaben, ganze Zahlen bedeuten mögen,

gen, b nicht kleiner als a, damit der Winkel nicht über 45 Grad ist.

II. So ist (Trig. 19. S. 6. Zus.) tang $w = \frac{2.a.b}{b^2-a^2}$; $\sec w^2 = \frac{b^4-2a^2b^2+a^4+4a^2.b^2}{(b^2-a^2)^2}$

daher $\sec w = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}$; $\cos w = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$;

$\sin w = \frac{2.a.b}{b^2+a^2}$.

III. Also sind eines Winkels $= w$ Tangente, Secante, Sinus, Cosinus; rational, wenn seiner Hälfte Tangente rational ist.

IV. Dieser Winkel befinde sich in einem rechtwinklichten Dreyecke, dessen Hypotenuse $= H$, Man nenne Höhe, die Seite dem genannten Winkel gegen über, Grundlinie die anliegende; so ist

Höhe $= H. \sin w = H. \frac{2.a.b}{b^2+a^2}$.

Grundlinie $= H. \cos w = H. \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.

V. Exempel. Man setze $a = 24$, $b = 25$; also tang $\frac{1}{2}w = 0,96$; giebt durch Proportionaltheile

$\frac{1}{2}w =$ 43 Grad 49 Minut. 51 Sec.; daher
$w =$ 87 39 42

Ferner $b^2 = 625$, $a^2 = 176$, daher $\sin w = \frac{1200}{1201}$; $\cos w = \frac{49}{1201}$; $\sec w = \frac{1201}{49}$; $\tang w = \frac{1200}{49}$. Setzt man also die Hypotenuse $H = 1201$ so kömmt Höhe $= 1200$; Grundlinie $= 49$.

VI. In Schulzens Sammlung, logarithmischer .... Tafeln II. Band, Berlin 1778. nimmt 308..311 Seite eine Tafel ein, deren Aufschrift ist rationale Trigonometrie. Ihre Columnen enthalten: Tangente eines halben Winkels, als ein Bruch ausgedruckt; eben die, in Decimaltheilen des Halbmessers, den ganzen Winkel, Perpendikel, Hypotenuse, Basis, des ganzen Winkels Ergänzung zu 90 Graden. Das Exempel (V) ist dieser Tafel Glied zunächst vor dem letzten. Der Grund der Berechnung der Tafel, findet sich in Lamberts deutschen Briefwechsel, von Hrn. Joh. Bernoulli herausgegeben II. Band (Berl. 1782.) 19. Brief 273 Seite.

VII. Dieß als eine etwas ausführliche Probe, solcher Untersuchungen. In Marcus Martini: Der getreue arithmetische Wegweiser zur Lehre der Jugend, Berlin 1741. (*) finden sich in

(*) In der allgem. deutschen Bibliothek, XXXI. B. 246 S. ist Mart. arithm. Wegweiser, Berl. 1776. recensirt. Die Seitenzahl 752. stimmt mit dem Exemplare das ich besitze überein, vielleicht ist es

in der Zugaberechnung 655 u. f. S. unterſchiedne ſolche Dreyecke in Tafeln dargeſtellt, auch ſpitzwinklichte, ſtumpfwinklichte.

VIII. In meiner geometriſchen Abhandlung. I. Samml. betrifft die 20. Abhandl. eine Regel aus den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks die ſchiefen Winkel ohne trigonometriſche Tafeln zu finden, die ſich am leichteſten auf ſolche rationale Dreyecke anbringen läſſt.

189. I. Die Regel Cöci, Zekis, oder Virginum, von welcher die Rechenmeiſter nur Exempel in Erzählungen eingekleidet geben, ohne allgemeine Vorſchriften, iſt eine unbeſtimmte Aufgabe, wo keine höhern der geſuchten Gröſſen als die erſte vorkommen, aber ganze und bejahte Zahlen verlangt werden. Dieſe Regel, und mehr Fragen der Art, betrifft meiner Fortſetzung der Rechenkunſt XIII. Cap. II. Abſchnitt. Für ungleichviel Waare, zu gleichen Preiſen verkauft, gleichviel zu löſen, habe ich im leipziger Magazin für Mathematik, 1788; 215 S. gezeigt.

II. In Leonh. Euler vollſtändiger Anleitung zur Algebra (1770.), enthält der zweyte Theil die unbeſtimmte Analytik. Die ſchwerſten Fragen betreffen Quadrate und Würfel. Hieher gehört

es alſo nicht einmahl eine neue Auflage, nur ein neuer Titel. Der Recenſent redet davon wie von einem Buche das 1776. ganz neu wäre.

hört auch Herrn de la Grange neue Methode unbestimmte Aufgaben in ganzen Zahlen aufzulösen, Histoire de l'Ac. Royale des Sc. et B. L. de Prusse année 1768. p. 181.

190. Anm. Wurzelgrössen so auszudrucken, daß das Gesuchte in ihnen einen rationalen Werth bekömmt (184 u. f.) ist beym Integriren brauchbar. Meine Analysis des Unendlichen 257.

Von den Gleichungen.

191. Aufg. **Wenn in einer bestimmten Gleichung die unbekannte Grösse sich unter Wurzelzeichen befindet, die Gleichung rational zu machen, d. i. in eine zu verwandeln, wo die unbekannte Grösse unter keinem Wurzelzeichen befindlich ist; die Coefficienten mögen rational oder irrational seyn.**

In einer rationalen Gleichung muß also die unbekannte Grösse lauter ganze Zahlen zu Exponenten haben.

I. Fall. Wenn nur ein einziges solches Wurzelzeichen vorhanden ist, schaffe man es auf eine Seite des Gleichheitszeichens und erhebe auf beyden Seiten auf die Potenz, deren Exponent der Wurzel Exponenten gleich ist. Die Wurzelgrösse muß auf einer Seite stehen, ohne das, was dazu addirt ist, weil man sie sonst durch dieses Verfahren nicht wegschafft.

Ex.

Ex. $\sqrt[3]{(7+y)} = 5y^2+1$ gibt cubirt $7+y = 125y^6+75y^4+15y^2+1$.

II. Fall. Wenn mehr als eines da ist, muß man diese Arbeit wiederhohlen.

Ex. $\sqrt[3]{(7+5y)} = 4+\sqrt{(3+2y^2)}+y$ gibt cubirt $7+5y = (4+y)^3+3\cdot(4+y)^2\cdot\sqrt{(3+2y^2)}+3(4+y)\cdot(3+2y^2)+(3+2y^2)\cdot\sqrt{(3+2y^2)}$ daraus wird $7+5y-(4+y)^3-3\cdot(4+y)\cdot(3+2y^2) = (3\cdot(4+y^2)+3+2y^2)\cdot\sqrt{(3+2y^2)}$ wo auf beyden Seiten noch quadrirt werden muß.

192. Aufg. Eine rationale bestimmte Gleichung zu ordnen.

Aufl. I. Wenn sich die unbekannte Gröſſe irgendwo im Divisor befindet, multiplicire man mit diesem Divisor alle Theile der Gleichung, damit sie nirgends im Divisor bleibt. Dieses muß wiederhohlt werden, wenn in mehr als einem Theile der Gleichung die unbekannte Gröſſe im Divisor ist.

II. Alles, was in einerley Potenz der unbekannten Gröſſe multiplicirt ist, sehe man als einen einzigen Coefficienten und das ganze Product aus diesem Coefficienten in die Potenz, als ein einziges Glied an. Zu dieser Absicht muß man alles, was in einerley Potenz multiplicirt ist, auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringen. Eine Gröſſe wird mit dem entgegengesetzten Zeichen

auf die gegenüberstehende Seite gebracht; die verschiedenen Theile des Coefficientens können in einer Columne unter einander geschrieben werden, an die man oben die Potenz schreibet.

III. Wenn die höchste Potenz der unbekannten Grösse einen andern Coefficienten als 1 hat, so dividire man damit jedes Glied, oder ist sie mit was dividirt, so multiplicire man jedes Glied damit; daß ihr Coefficient 1 wird.

IV. Hat sie das Zeichen + vor sich, so bringe man alle Glieder auf die Seite des Gleichheitszeichens, auf der sie steht. Hat sie — so bringe man sie und alle übrigen Glieder, die mit ihr auf einer Seite stehen, auf die andere Seite, da sie denn + bekömmt. So bleibt auf einer Seite des Gleichheitszeichens allemahl 0.

V. Die höchste Potenz schreibe man zuerst zur linken Hand und die andern Glieder in der Ordnung nach ihr, wie ihre Potenzen folgen (2; 3).

Ex. $a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$ gibt nach I.

$az^3 - mz^4 - ae + mez = z + \frac{cz^3 - ec}{z^2}$ und

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec.$

und nach II.

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = - ec$

$- 1$

$- c$

und

und nach III.

$$\frac{a}{m}z^5 - z^6 - \frac{ae}{m}z^2 + \frac{me-1-c}{m}z^3 = -\frac{ec}{m}.$$

und nach IV. V.

$$0 = z^6 - \frac{a}{m}z^5 * - \left(\frac{me-1-c}{m}\right).z^3 + \frac{ae}{m}z^2 * - \frac{ec}{m}.$$

193. Anm. Hier werden zuweilen Coefficienten $= 0$ oder die Glieder fehlen. Z. E. wenn $me = c + 1$. Man kann nähmlich jedes Glied, das fehlt, ansehen, als wäre sein Coefficient $= 0$. Man kann auch Grössen, die auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, sogleich weglassen, weil sie sich aufheben; z. E. $z^3 - 6z = 4 - 6z + 3z^2$ gibt $z^3 = 4 + 3z^2$.

194. Zus. Eine Gleichung, in welcher zwo unbekannte Grössen sind, lässt sich auf diese Art nach einer von ihnen ordnen, wenn man die andere mit in die Coefficienten der Glieder bringt. Man kann jeden dieser Coefficienten nach der andern ordnen.

Ex. $y^2 + axy + cx^2 = 0$
$+ b \quad + ex$
$+ f$

195. Aufg. **Aus zwo Gleichungen, deren jede zwo unbekannte Grössen, aber eine nur von der ersten Abmessung enthält, diese wegzuschaffen, d. i. eine dritte Gleichung zu machen, in welcher nur die andere unbekannte Grösse zu finden ist.**

Aufl. Aus der Gleichung, in welcher die Grösse, die man wegschaffen will, nur auf die erste Abmessung steigt, suche man ihren Werth und seze ihn in die andere.

Ex. Aus der Gleichung 194. und gegenwärtiger $y + mx + n = o$ soll man y wegschaffen; so seze man in jene $- mx - n$ statt y; dieses gibt die dritte.

$$\begin{array}{llll} m^2x^2 & + 2mnx & + n^2 & \\ -am & - an & & = o \\ & - bm & - bn & \\ +c & + e & +f & \end{array}$$

196. Aufg. Zwo rationale Gleichungen A; B; enthalten jede zwo unbekannte Grössen x; y; und zwar ist die höchste Potenz in beyden Gleichungen einerley. Man soll aus ihnen eine dritte Gleichung C machen, wo die höchste Potenz von y wenigstens einen Grad niedriger als in einer der beyden vorigen.

Aufl. Man suche den Werth der höchsten Potenz aus jeder der ersten Gleichungen, und seze beyde Werthe gleich.

Ex. A) $3y^3 + xy^2 + x^3 = o$; B) $\frac{y^3}{x} - a^2 + by = b$ gibt $y^3 = -\frac{xy^2}{3} - \frac{x^3}{3} = a^2x - bxy$ also geordnet (194) C) $o = y^2 - 3by + x^2 + 3a^2$.

197. Aufg. In zwo Gleichungen D; E; befinden sich zwo unbekannte Grössen, und zwar ist y in D auf eine höhere Potenz erhoben als in E; Man soll eine dritte Gleichung G machen, in der die höchste Potenz von y wenigstens einen Grad niedriger ist als in D.

Aufl. Man multiplicire alle Glieder von E durch die Potenz von y, welche macht, daß in der neuen Gleichung F; die man durch diese Multiplication erhält, die höchste Potenz von y mit der höchsten Potenz in D einerley ist. Nun verfahre man mit D; F; wie mit A; B; (196).

Ex. D) $y^5 - a^4 x = 0$; E) $y^2 - xy - b^2 = 0$; F) $y^5 - xy^4 - b^2 y^3 = 0$; G) $y^4 + \frac{b^2}{x} y^3 ** - a^4 = 0$.

198. Erkl. Eine Gleichung ist niedriger als die andere, wenn die höchste Potenz der Grösse, nach der beyde geordnet sind, in jener niedriger ist als in dieser.

So ist G einen Grad, und E zweene Grade niedriger als D (197).

199. Aufg. Zwo Gleichungen H; K; enthalten zwo unbekannte Grössen; Man soll die eine y; nach der sie beyde geordnet sind, aus ihnen wegschaffen (eliminare incognitam vnam), d. i. eine Gleichung V machen, die nur die andere unbekannte Grösse enthält.

auf die gegenüberstehende Seite gebracht; die verschiedenen Theile des Coefficientens können in einer Columne unter einander geschrieben werden, an die man oben die Potenz schreibet.

III. Wenn die höchste Potenz der unbekannten Grösse einen andern Coefficienten als 1 hat, so dividire man damit jedes Glied, oder ist sie mit was dividirt, so multiplicire man jedes Glied damit; daß ihr Coefficient 1 wird.

IV. Hat sie das Zeichen + vor sich, so bringe man alle Glieder auf die Seite des Gleichheitszeichens, auf der sie steht. Hat sie — so bringe man sie und alle übrigen Glieder, die mit ihr auf einer Seite stehen, auf die andere Seite, da sie denn + bekömmt. So bleibt auf einer Seite des Gleichheitszeichens allemahl o.

V. Die höchste Potenz schreibe man zuerst zur linken Hand und die andern Glieder in der Ordnung nach ihr, wie ihre Potenzen folgen (2; 3).

Ex. $a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$ gibt nach I.

$az^3 - mz^4 - ae + mez = z + \frac{cz^3 - ec}{z^2}$ und

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec.$

und nach II.

$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = - ec$

$- 1$

$- e$

und

und nach III.

$$\frac{a}{m}z^5 - z^6 - \frac{ae}{m}z^2 + \frac{me-1-c}{m}z^3 = -\frac{ec}{m}.$$

und nach IV. V.

$$0 = z^6 - \frac{a}{m}z^5 * - \left(\frac{me-1-c}{m}\right).z^3 + \frac{ae}{m}z^2 * - \frac{ec}{m}.$$

193. Anm. Hier werden zuweilen Coefficienten $= 0$ oder die Glieder fehlen. Z. E. wenn $me = c + 1$. Man kann nähmlich jedes Glied, das fehlt, ansehen, als wäre sein Coefficient $= 0$. Man kann auch Gröſſen, die auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, sogleich weglassen, weil sie sich aufheben; z. E. $z^3 - 6z = 4 - 6z + 3z^2$ gibt $z^3 = 4 + 3z^2$.

194. Zus. Eine Gleichung, in welcher zwo unbekannte Gröſſen sind, läſst sich auf diese Art nach einer von ihnen ordnen, wenn man die andere mit in die Coefficienten der Glieder bringt. Man kann jeden dieser Coefficienten nach der andern ordnen.

Ex. $y^2 + axy + cx^2 = 0$
$+ b + ex$
$+ f$

195. Aufg. **Aus zwo Gleichungen, deren jede zwo unbekannte Gröſſen, aber eine nur von der ersten Abmessung enthält, diese wegzuschaffen, d. i. eine dritte Gleichung zu machen, in welcher nur die andere unbekannte Gröſſe zu finden ist.**

Aufl. Aus der Gleichung, in welcher die Grösse, die man wegschaffen will, nur auf die erste Abmessung steigt, suche man ihren Werth und seze ihn in die andere.

Ex. Aus der Gleichung 194. und gegenwärtiger $y + mx + n = o$ soll man y wegschaffen; so seze man in jene $- mx - n$ statt y; dieses gibt die dritte.

$$\begin{array}{lll} m^2x^2 + 2mnx + n^2 & & \\ -am - an & & = o \\ - bm - bn & & \\ +c + e + f & & \end{array}$$

196. Aufg. Zwo rationale Gleichungen A; B; enthalten jede zwo unbekannte Grössen x; y; und zwar ist die höchste Potenz in beyden Gleichungen einerley. Man soll aus ihnen eine dritte Gleichung C machen, wo die höchste Potenz von y wenigstens einen Grad niedriger als in einer der beyden vorigen.

Aufl. Man suche den Werth der höchsten Potenz aus jeder der ersten Gleichungen, und seze beyde Werthe gleich.

Ex. A) $3y^3 + xy^2 + x^3 = o$; B) $\frac{y^3}{x} - a^2 + by = o$ gibt $y^3 = -\frac{xy^2}{3} - \frac{x^3}{3} = a^2x - bxy$ also geordnet (194) C) $o = y^2 - 3by + x^2 + 3a^2$.

197.

197. Aufg. In zwo Gleichungen D; E; befinden sich zwo unbekannte Grössen, und zwar ist y in D auf eine höhere Potenz erhoben als in E; Man soll eine dritte Gleichung G machen, in der die höchste Potenz von y wenigstens einen Grad niedriger ist als in D.

Aufl. Man multiplicire alle Glieder von E durch die Potenz von y, welche macht, daß in der neuen Gleichung F; die man durch diese Multiplication erhält, die höchste Potenz von y mit der höchsten Potenz in D einerley ist. Nun verfahre man mit D; F; wie mit A; B; (196).

Ex. D) $y^5 - a^4 x = 0$; E) $y^2 - xy - b^2 = 0$; F) $y^5 - xy^4 - b^2 y^3 = 0$; G) $y^4 + \frac{b^2}{x} y^3 ** - a^4 = 0$.

198. Erkl. Eine Gleichung ist niedriger als die andere, wenn die höchste Potenz der Grösse, nach der beyde geordnet sind, in jener niedriger ist als in dieser.

So ist G einen Grad, und E zweene Grade niedriger als D (197).

199. Aufg. Zwo Gleichungen H; K; enthalten zwo unbekannte Grössen; Man soll die eine y; nach der sie beyde geordnet sind, aus ihnen wegschaffen (eliminare incognitam vnam), d. i. eine Gleichung V machen, die nur die andere unbekannte Grösse enthält.

Aufl. Wenn H; K; nicht gleich hoch sind (196), so sey H am höchsten (197). In beyden Fällen bekömmt man aus 196. 197. eine Gleichung L; die wenigstens einen Grad niedriger ist als H. Sind nun K; L; gleich hoch, so verfahre man nach (196) oder wenn sie nicht gleich hoch sind, nach (197) eine Gleichung M zu erhalten, die gewiß einen Grad niedriger ist als die höchste von beyden; K oder L; Nun vergleiche man M mit der niedrigsten der beyden K oder L; so bekömmt man eine neue Gleichung N; die gewiß einen Grad niedriger ist als die höchste der beyden, aus denen sie entstanden ist. Und so vermindert man die Grade der Gleichungen beständig, bis man auf eine vom ersten Grade T kömmt, aus der man mit K als der niedrigsten von beyden H; K; verglichen nach (195) V erhält. Es ist bequem, hier die Gleichungen so zu ordnen, daß die höchste Potenz allein, positiv, ohne Coefficienten, auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehet, weil man auf diese Art die Werthe dieser höchsten Potenz am bequemsten gleich setzen kann.

200. Ex. H) $y^7 = a^6 x$. K) $y^3 = axy - b^3$; K mit y^4 multiplicirt (197) und beyde Werthe der höchsten Potenz gleich gesetzt, gibt $a^6 x = axy^5 - b^3 y^4$ daraus kömmt L) $y^5 = \frac{b^3}{ax} y^4 + a^5$ und dieses ist mit K verglichen nach (197) $= axy^3 - b^3 y^2$ daraus folgt M) $y^4 = \frac{}{a^2}$

$\frac{a^2x^2}{b^3}y^3 - axy^2 - \frac{a^6x}{b^3}$ und dieses ist mit K verglichen nach (197) $= axy^2 - b^3y$. Daraus folgt N) $y^3 = \frac{2b^3}{ax}y^2 - \frac{b^6}{a^2x^2}y + \frac{a^4}{x}$ und dieses ist, mit K verglichen, nach (196) $= axy - b^3$ daraus folgt O) $y^2 = \frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}y - \frac{a^5 + ab^3x}{2b^3}$ dieses nach 197. mit K verglichen gibt $\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}y^2 - \frac{(a^5 + ab^3x)y}{2b^3} = axy - b^3$ daraus folgt P) $y^2 = \frac{(a^5 + 3ab^2x).ax}{(a^3x^3 + b^6)}y - \frac{2ab^6x}{a^3x^3 + b^6}$ und die Werthe von y^2 aus P; O; gleich gesetzt, gibt nach (196)

T) $$y = \frac{\frac{2ab^6x}{a^3x^3 + b^6} - \frac{a^5 + ab^3x}{2b^3}}{\frac{(a^5 + 3ab^3x)ax}{(a^3x^3 + b^6)} + \frac{a^3x^3 + b^6}{2ab^2x}}$$

wovon der Würfel und die erste Potenz in K gesetzt, V geben werden.

201. Zweytes Exempel. H sey die Gleichung (194) und

K)

K) $y^2 = -\alpha x \left| \begin{matrix} y - \gamma x^2 = -ax \\ -\beta \end{matrix} \right| \begin{matrix} y - cx^2 \\ -ex \\ -f \end{matrix}$ (196)
$\qquad\qquad -\varphi \qquad\quad -b \qquad\quad -ex$

also T) $y = \dfrac{(\gamma - c)\,x^2 + (\varepsilon - e)\,x + \varphi - f}{(a - \alpha)\,x + b - \beta}$

Dieser Werth in H gesetzt, gibt:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{((\gamma - c)\,x^2 + (\varepsilon - e)\,x + \varphi - f)^2}{((a - \alpha)\,x + b - \beta)^2} \\ + \dfrac{a.(\gamma - c)\,x^3 + a\,(\varepsilon - e)\,x^2 + a\,(\varphi - f)\,x}{(a - \alpha)\,x + b - \beta} \\ + \dfrac{b.(\gamma - c)\,x^2 + b\,(\varepsilon - e)\,x + b.(\varphi - f)}{(a - \alpha)\,x + b - \beta} \\ + cx^2 + ex + f \end{matrix}\right\} = 0$$

oder $(\gamma - c)^2$
$+ a.(a - \alpha).(\gamma - c)$ $\Big\}\, x^4$

$+ 2.(\gamma - c).(\varepsilon - e)$
$+ a\,(a - \alpha).(\varepsilon - e)$
$+ (a - \alpha).b.(\gamma - c)$ $\Big\}\, x^3$
$+ (b - \beta).a.(\gamma - c)$

$+ (\varepsilon - e)^2$
$+ 2.(\gamma - c).(\varphi - f)$
$+ a\,(a - \alpha).(\varphi - f)$
$+ (a - \alpha).b.(\varepsilon - e)$ $\Big\}\, x^2$
$+ (b - \beta).(\varepsilon - e)$
$+ (b - \beta).b.(\gamma - c)$
$+ c$

$+ 2.$

$$+2.(\varepsilon-e).(\varphi-f)$$
$$+(a-\alpha).b.(\varphi-f)$$
$$+(b-\beta).(\varphi-f)\ \Big\}\ x$$
$$+(b-\beta).b.(\varepsilon-e)$$
$$+e$$
$$+(\varphi-f)^2$$
$$+(b-\beta).b.(\varphi-f)=0$$
$$+f.$$

Mehr Exempel und allgemeine Formeln hievon findet man in Newtons Ar. vn. 62. Seite in Graveſandes Ausgabe. Die Gleichungen ſind da ſo vorgeſtellt als enthielte jede, nur eine unbekannte Gröſſe, nach der jede geordnet iſt. Die wird allemahl aus zwo Gleichungen weggeſchafft. Enthält nun jede dieſer Gleichungen noch eine unbekannte Gröſſe, ſo befindet ſich dieſe allein in der Gleichung die aus beyden entſteht. Mir ſcheint das Verfahren das ich beym zweyten Exempel angewandt habe, Abſicht und Gebrauch deutlicher darzuſtellen.

So iſt jede der beyden Gleichungen des Exempels, eine allgemeine, die jede Linie der zweyten Ordnung (unten 419.) angiebt, und die aus ihnen wird, thut allgemein dar, daß ein paar ſolche Linien einander in nicht mehr als 4 Puncten ſchneiden, und giebt die vier Abſciſſen die den Durchſchnitten gehören (unten 495.).

202. Zuſ. Wenn von drey Gleichungen A; B; C; jede drey unbekannte Gröſſen, x; y; z; enthält, ſo kann man aus A und B; z wegſchaffen, oder eine neue D; machen, die blos x; y; enthält. Eben ſo kann man aus A und C; oder aus B und O; eine E machen, die blos x; y; enthält; und aus D und E, kann man y wegſchaffen und eine F machen, die nur x enthält. Alſo läſſt ſich aus dieſen drey Gleichungen eine einzige beſtimmte machen, und zwo unbekannte Gröſſen laſſen ſich aus ihnen wegſchaffen.

203. Zuſ. Hat man vier Gleichungen G, H, I, K, die vier unbekannte Gröſſen p; q; r; s; enthalten, ſo mache man nach 202. aus G; H; I; eine L; aus der p; q; weggeſchafft ſind; und aus H; I; K; eine M; aus der auch p; q; weggeſchafft ſind; ſo enthalten L; M; nur r; s; und man kann aus ihnen r wegſchaffen, und eine O machen, die nur s enthält. Oder aus vier Gleichungen laſſen ſich drey unbekannte Gröſſen wegſchaffen.

204. Zuſ. Eben ſo laſſen ſich vier unbekannte Gröſſen aus fünf Gleichungen wegſchaffen, wenn man nach 203. mit der erſten, zweyten, dritten, vierten; und noch einmahl mit der zweyten, dritten, vierten, fünften, nach 199. aber mit den beyden Gleichungen, die man ſolchergeſtalt erhalten hat, verfährt.

205. Zuſ. Ueberhaupt erhellt, daß ſich aus n Gleichungen n — 1 unbekannte Gröſſen wegſchaffen

schaffen lassen, weil man aus 6 Gleichungen zweymahl 5 nehmen, und also 204. zweymahl anbringen kann, da denn die Sache für 6 Gleichungen aus 204. erfolgt, wie 204. aus 203. folgt. Nun kann man aus 7 Gleichungen zweymahl 6 nehmen, u. s. w.

206. Zus. Jede Gleichung bestimmt eine unbekannte Grösse, so daß man statt dieser unbekannten Grösse, nicht was man will setzen darf, sondern daß es nur einen oder etliche Werthe gibt, die der Gleichung genug thun, wie zweene bey der quadratischen Gleichung (78) davon auch welche, oder vielleicht alle, wie beyde in der quadratischen, unmöglich seyn können.

207. Zus. Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn für sie soviel verschiedene Gleichungen gegeben sind, als bey ihr unbekannte Grössen vorkommen. Alsdenn kann man nähmlich aus allen diesen Gleichungen eine einzige bestimmte (73) machen; die von diesen unbekannten Grössen, welche man will enthält.

208. Anm. I. Ich sage, es müssen soviel Gleichungen gegeben seyn. Denn die man aus den gegebenen findet, wie C aus A; B; (196) bestimmen nichts mehr als was die gegebenen bestimmten. Dahin kann man auch rechnen, wenn aus einer Gleichung eine andere so wird, daß man auf beyden Seiten einerley addirt oder subtrahirt, denn da wird dieses addirte oder subtrahirte auf keine Weise durch die andere Gleichung be-

bestimmt. Wenn A) $ac - ex = bx$ so addire man auf beyden Seiten cy; dieses gibt B) $ac - ex + cy = bx + cy$ aber B bestimmt y auf keine Art; und folglich darf man nicht aus den beyden Gleichungen A; B; beyde unbekannte Grössen finden wollen, weil die zweyte nicht mehr als die erste bedeutet. So könnte man annehmen $fz = ac - ex + cy$; $fz = bx + cy$; oder C) $fz + ex - cy = ac$; D) $bx + cy - fz = o$; aber aus A; C; D; würden sich die drey unbekannten Grössen nicht bestimmen lassen, weil C; D; nichts weiter als A enthalten.

II. Wenn man acht gibt, wie sich Grössen durch die Subtraction, Division u. d. gl. aufheben, so kann man oft in besondern Fällen eine unbekannte Grösse wegschaffen, ohne den Regeln Fuß für Fuß zu folgen. Es sey $ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$ $= \frac{b^2.(x-b)}{z}$ und $x = \frac{az}{x-b}$ so hat man gleiches mit gleichen multiplicirt, $axx = abb$ oder $xx = bb$.

209. Anm. Die mühsame Arbeit hiebey hat man auf unterschiedne Art zu erleichtern gesucht. Dahin gehört ein Theil von Eulers unten (494) angeführter Abhandlung. Bey Cramer, Introd. à l'Analyse des lignes courbes algébriques (Genf 1750.) findet sich 656 u. f. S. ein Anhang, de l'évanouissement des inconnues. Bezout, sur le degré des équations résultantes

de l'évanouissement des inconnues Mém. de l'Acad. des Scienc. 1764. p. 281. Eben derf. Théorie générale des équat. algébriques. Par. 1779. lehrt, aus n Gleichungen, deren jede n unbekannte Gröſſen enthält, eine machen.

In der Vorrede zu Rüdigers Specim. analyt. de lineis curuis secundi ordinis (S. unten 422. XXII.) hat Herr Prof. Hindenburg XV u. f. Seiten, Bezouts Methode erläutert, und vieles von Wegschaffung der Gröſſen aus Gleichungen beygebracht, das auf Kunstgriffen seines Noui Systematis permutationum ... beruht.

210. Grundſ. In jeder bestimmten Gleichung gibt es einen oder mehr, mögliche oder unmögliche Werthe, für die unbekannte Gröſſe.

211. Zuſ. Wenn für n unbekannte Gröſſen, soviel Gleichungen gegeben sind, so lassen sich n bestimmte Gleichungen finden, deren jede nur eine dieser unbekannten Gröſſen enthält (206). Es gibt also Werthe für jede dieser unbekannten Gröſſen (210) oder man darf n Gröſſen als unbekannt annehmen, wenn man für sie nicht mehr als n Gleichungen annimmt.

212. Anm. Ich sage hiemit nicht, daß es allemahl in unserer Gewalt stehe, diese Werthe zu finden. Bisher ist solches nur für die Fälle gewiesen, wo die bestimmte Gleichung einfach oder quadratisch ist (61. 78.).

213. Zus. Sind mehr Gleichungen als unbekannte Grössen, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt (plus quam determinata), man kann alsdenn nicht nur alle unbekannte bis auf eine, wie in (205) sondern überhaupt alle wegschaffen, und eine oder mehr Gleichungen zwischen den bekannten Grössen erhalten; dadurch ein Verhalten zwischen den bekannten Grössen bestimmt wird, das statt finden muß, wenn sich diese Gleichungen zusammen schicken sollen.

Ex. I) $a + x = b$; II) $xy = c$; III) $y - x = d$; Hier geben I. und III. addirt; $a + y = b + d$; also $y = b + d - a$ folglich aus II. $x = \frac{c}{b + d - a} = b + d - a$ aus I; Also können diese drey Gleichungen nicht statt finden, wofern nicht $c = (b - a)^2 + (b - a)\,d$ (IV). Haben aber die bekannten Grössen das Verhalten gegen einander, das die Gleichung IV. erfodert, so schicken sich I; II; III; zusammen, und können mit einander statt finden. Es sey $d = 0$; so muß $c = (b - a)^2$ seyn, und die Gleichungen heissen I) $x = b - a$; II) $xy = (b - a)^2$; III) $y = x$ wo offenbahr II. aus I. III. folgt; also kann c das $= xy$ seyn soll, nichts anders als $(b - a)^2$ seyn.

214. Aufg. Den Ursprung der quadratischen Gleichungen aus der Multiplication zu erklären.

Aufl. I. Man ſetze $x-a=P$; $x-b=Q$; ſo iſt $P.Q=(x-a).(x-b)=x^2-ax+ab$
$-b$

Dieſes Product wird $=o$ wenn einer von ſeinen beyden Factoren $=o$ iſt. Aber aus $P=o$ folgt $x=a$; aus $Q=o$, folgt $x=b$; Alſo wird $x^2-ax+b=o$ wenn $x=a$; oder $x=b$.
$=b$

II. Daß ein Product verſchwindet, dazu iſt genug wenn nur ein Factor in ihm $=o$ iſt. Daher wird $P.Q=o$; wenn nur z. E. $P=o$ iſt, obgleich alsdann nicht $Q=o$, ſondern $Q=a-b$ iſt.

III. Wenn ein einfacher Factor ein ſolcher heißt, der nur x von der erſten Abmeſſung enthält und ſo daß es nur 1 zum Coefficienten hat, dergleichen $x-a$; $x-b$; ſind, ſo erhellt, daß ein Product aus zween ſolchen einfachen Factoren, $=o$ geſetzt, eine quadratiſche Gleichung nach 192. geordnet giebt, weil nun dieſes Product $=o$ wird, nachdem einer oder der andere Factor $=o$ iſt, ſo macht die Zahl die ein ſolches Product $=o$; macht, ſtatt x geſetzt auch die Gleichung $=o$; oder ſie iſt der Gleichung Wurzel (74).

IV. Jedes Product von zwo Abmeſſungen wie P. Q. (II) kann alſo $=o$ geſetzt eine quadratiſche Gleichung werden, deren beyde Wurzeln a; b; ſind.

V. Aber iſt auch jede quadratiſche Gleichung ein Product aus zween einfachen Factoren? Dieſe

se Frage zu beantworten, setze ich eine quadratische Gleichung sey $x^2 + fx + g = 0$ und will nun untersuchen, ob das was hier linker Hand des Gleichheitszeichens steht, mit $x^2 - ax + ab$ allemahl einerley seyn kann. $- b$

VI. Dieses wird geschehen, wenn $-a-b = f$ und $+ab = g$ lässt sich also dieses beydes annehmen, wie groß auch f und g, seyn mögen, das ist, lassen sich für jede f und g, auch a und b finden, so ist die Frage (V) zu bejahen.

VII. Das könnte man nun schon aus 207. herleiten, weil für die beyden unbekannten Grösen, a; b; zwo Gleichungen gegeben sind. Es ist aber der Mühe werth dieses noch umständlicher zu zeigen.

VIII. Nähmlich die quadratische Gleichung (V) aufgelöst, giebt $x = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - g)}$ (78). Man setze nun

$$x + \tfrac{1}{2}f - \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = R$$
$$x + \tfrac{1}{2}f + \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = S$$

so kömmt

$$R.S = x^2 + \tfrac{1}{2}f \left| \begin{matrix} x \\ + \tfrac{1}{2}f \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} - x \\ - \tfrac{1}{2}f \\ + x \\ + \tfrac{1}{2}f \end{matrix} \right| \sqrt{(\tfrac{1}{4}f^2 - g)}$$
$$+ \tfrac{1}{4}f^2$$
$$- \tfrac{1}{4}f^2 + g$$

oder R. S $= x^2 + fx + g$; und folglich kann man annehmen

$$\tfrac{1}{2}f - \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = -a$$
$$\tfrac{1}{2}f + \sqrt{(\tfrac{1}{4}ff - g)} = -b$$

da $-a-b=f$; und $+ab=g$ für jedes f und g, giebt es also auch a und b.

IX. Es ist klar daß wenn $R=0$ seyn soll, das x welches dieses thut, mit dem x das $S=0$ macht nicht einerley ist. Das wird aber auch nicht erfodert (II).

X. Was mit der Wurzelgröße im Producte (VIII) multiplicirt wird, ist zusammen $=0$ daher sind des Products Coefficienten rational, wenn f; g, rational sind.

XI. Beyde Werthe von x (VIII) sind zugleich möglich oder unmöglich, nachdem $\frac{1}{4}f^2 - g$ bejaht oder verneint ist (33).

XII. Wenn beyde Werthe unmöglich sind, so ist sowohl R als S unmöglich, aber ihr Product möglich, weil sich das unmögliche bey der Multiplication aufhebt, und das Product hat nur mögliche Coefficienten, wenn f; g; möglich sind.

XIII. Exempel wo beyde Wurzeln unmöglich sind. $x^2 - 6x + 16 = 0$; wo $x = 3 \pm \sqrt{-7}$; Es ist hier $f=-6$; $g=16$

und $R = x - 3 - \sqrt{-7}$

$S = x - 3 + \sqrt{-7}$

$R.S = x^2 - 3\left[\begin{matrix} x - x \\ -3 \\ +3 \\ +x \\ -3 \end{matrix}\right] \cdot \sqrt{-7}$

$+9 - (-7)$ (wegen 36.)

Probe

$(3 \pm \sqrt{-7})^2 = 9 \pm 6\sqrt{-7} - 7$

$-6.(3 \pm \sqrt{-7}) = -18 \mp 6\sqrt{-7}$

$+16 = +16$

$0 = +25 - 25$

XIV. Weil $\frac{1}{4}f^2$ allemahl bejaht ist (311) so kann die unbekannte Gröſſe keine unmögliche Werthe haben, wenn nicht $+g$ in V. eine verneinte Gröſſe ist (VIII).

XV. Insgemein trägt man diesen Ursprung der Gleichungen aus der Multiplication so vor: Man soll für die quadratische Gleichung zweyen Werthe der unbekannten Gröſſe annehmen; als $x = a$; $x = b$; Diese auf Gleichungen, wo auf einer Seite 0 steht bringen $x - a = 0$; $x - b = 0$; und alsdenn mit einander multipliciren, da denn das Product auch $= 0$ seyn werde. Hiegegen ist folgendes einzuwenden: 1) Wenn $x - a = 0$; $x - b = 0$, so muß in dem Producte $(x - a).(x - b)$ das x im ersten Factor $= a$;

$= a$; im zweyten $= b$ seyn. Was denkt man also dabey wenn man das erste x mit dem zweyten multiplizirt x^2 nennt? Kann man a. b für ein Quadrat annehmen? a) Weil $x - a = 0$ mit $x = a$; und $x - b = 0$ mit $x = b$ gleichgültig ist, warum rechnet man nicht so?

$$\begin{array}{r} x' = a \\ x = b \\ \hline x^2 = ab \end{array}$$

Diese beyden Schwürigkeiten, denen der durchgängig gewöhnliche Vortrag ausgesetzt ist, werden von mir hier gehoben. Ich nehme nicht an daß zugleich $x - a = 0$; $x - b = 0$ seyn soll; es mag anfangs gar keines von beyden $= 0$; Das erste etwa $= p$; Das andere $= q$ seyn. Das Product pq wird $= 0$ wenn entweder $x = a$; alsdenn $q = a - b$; oder $x = b$ alsdenn $p = b - a$ ist; daher kann in dem Producte pq; der Theil x^2 ein Quadrat seyn, auch wenn dieses Product verschwinden soll; nähmlich das Quadrat entweder von a oder von b. Hieraus folgt nun gleich die Auflösung der zweyten Schwierigkeit. Ich multiplicire nicht $x - a$ mit $x - b$ in sofern jedes $= 0$ ist; also ist mein Verfahren nicht eben das als ob ich $x = a$; $x = b$; setzte, sondern ich müsste $x = a + p$; $x = b + q$ setzen, und daraus folgte nicht $x^2 = ab$ sondern $x^2 = (a + p).(b + q)$.

XVI. Die quadratische Gleichung $P.Q = 0$ (I) hat also gewiß zwo Wurzeln, a; b; könnte

sie ihrer bey eben den Coefficienten nicht mehr haben? Das ist: Wenn $x^2 + fx + g = R.S$ wo f und g gegeben sind, so beschaffen ist, daß $f = a + b$, $g = ab$ könnte nicht auch zugleich $f = c + d$; $g = cd$ seyn, so daß c; d; ganz andere Gröſſen als a und b wären? In diesem Falle würde R. S auch verschwinden wenn $x = c$ oder d; und die Gleichung $R. S = o$ hätte vier Wurzeln; a, b, c; d; Oder wenn wenigstens c allein, von a und b unterschieden, aber d etwa $= a$ wäre, so hätte diese Gleichung drey Wurzeln.

XVII. Dieses läſst sich folgender Gestalt entscheiden: Es sey $x - c = T$; $x - d = V$; $x^2 - cx + cd = T. V$; Ferner $c + d = a + b$; $cd = ab$; also $P. Q = T. V$; Ist nun $T = o$ also $T. V = o$, so muß auch $P. Q = o$ seyn; Folglich entweder $P = o$ oder $Q = o$; Denn wenn ein Product $= o$ ist, so muß gewiß ein Factor von ihm $= o$ seyn. Also ist für $x = c$; zugleich entweder $x = a$ oder $x = b$; das ist, weil einerley x hier durchgehends ist (XV) $c = a$ oder $= b$; Eben so folgt aus der Voraussetzung $V = o$; daß P oder $Q = o$; das ist wenn $x = d$; daß zugleich $x = a$ oder $= b$; folglich auch d entweder $= a$ oder $= b$; Es sind also c; d; keine andere Gröſſe als a und b; und die Gleichung (XVI) hat nicht mehr als zwo Wurzeln.

215. Erkl. Wenn eine Gleichung nach 192. IV. geordnet ist, daß auf einer Seite des Gleichheitszeichens, o steht, so heißt ihre Wurzel das was statt der unbekannten Größe die x heissen mag gesetzt, macht daß sich alle Glieder aufheben, oder zusammen = o werden (74). Ist solches was unmögliches, so heißt es hier, eine unmögliche Wurzel. Wenn man also statt x etwas setzt, das keine Wurzel ist, so heben sich die Glieder nicht auf. Läßt sich das was auf einer Seite des Gleichheitszeichens dem o gegen über beysammen steht, als ein Product aus einfachen Factoren wie $(x-a).(x-b).(x-c)$ u. s. w. ansehen; so wird solches so oft, und nicht öfter = o; als einer dieser Factoren = o wird; und so viel unterschiedene Werthe, hat x, daß es = a; = b; = c; u. s. w. wird, oder so oft wird es eine Wurzel. Es kann daher ein solcher Factor $x - a = o$ gesetzt eine Wurzelgleichung genennt werden, und daher sagt man gewöhnlich: die Gleichung entstehe aus der Multiplication so vieler Wurzelgleichungen, soviel es solche Factoren giebt. Dieser Ausdruck ist nicht völlig richtig; denn es kann auf einmahl nur eine Wurzelgleichung wahr seyn; es ist nicht zugleich $x - a = o$ und $x - b = o$ auser wenn $a = b$ (214. XV) aber man braucht auch diesen Ausdruck nie so, daß man dieses zugleich annähme. Man kann ihm die Bedeutung geben: Die Gleichung entsteht aus Factoren, von denen einer, welchen man will, = o seyn kann.

216. So hat jede quadratische Gleichung zwo Wurzeln, die beyde zugleich möglich oder unmöglich sind (214. XI) und entspringt aus zwo Wurzelgleichungen, deren eine $x-a=0$; die andere $x-b=0$ ist (214. XV).

217. Zus. In der erwähnten quadratischen Gleichung ist des zweyten Gliedes Coefficient, die Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen oder die Summe der Grössen, welche den Wurzeln entgegengesetzt sind. Die Summe der Wurzeln selbst nähmlich wäre $+a+b$ und des zweyten Gliedes Coefficient ist $-a-b$; Es ist klar, daß $+a$ oder b, eines allein, oder eines wie das andere, was negatives bedeuten können, in welchem Falle $-a$; oder b; eines allein oder eines wie das andere positiv wären, der Satz aber doch wahr bliebe.

218. Zus. Das letzte Glied der quadratischen Gleichung ist ein Product aus den Grössen, welche den Wurzeln entgegengesetzt sind.

I) $a=+7$; $b=+12$; so ist $(x-7).(x-12)$
$=x^2-19x+84$.

II) $a=-9$; $b=+11$; so ist $(x+9).(x-11)$
$=x^2-2x-99$.

III) $a=+9$; $b=-11$; so ist $(x-9).(x+11)$
$=x^2+2x-99$.

IV) $a=-5$; $b=-3$; so ist $(x+5).(x+3)$
$=x^2+8x+15$.

Die

Diese Fälle sind nähmlich I. beyde Wurzeln positiv; IV. beyde negativ; II. die positive grösser; III. die negative grösser.

219. Aufg. Den Ursprung höherer Gleichungen aus der Multiplication zu erklären.

Aufl. I. Man nehme soviel einfache Factoren (214. III.), als man will an: $x - a = A$; $x - b = B$; $x - c = C$; $x - d = D$ u. s. w. so ist

$$\begin{array}{l} x^2 + ax + ab = A.B \\ \quad -b \\ \hline x^3 - ax^2 + abx - abc = A.B.C \\ \quad -b \quad +ac \\ \quad -c \quad +bc \\ \hline x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = A.B.C.D \\ \quad -b \quad +ac \quad -abd \\ \quad -c \quad +bc \quad -acd \\ \quad -d \quad +ad \quad -bcd \\ \qquad\quad +bd \\ \qquad\quad +cd \end{array}$$

u. s. w.

II. So entsteht immer ein Product, in dem x einen Grad höher steigt, wenn man das nächsthorhergehende, mit einem neuen Factor multiplicirt. Ist $x - e = E$ so gibt A. B. C. D. E ein Product von fünf Abmessungen, in dem x auf die fünfte Potenz steigt u. s. w.

III.

III. Wenn von diesen einfachen Factoren, einer $=0$; so verschwindet das Product, in dem er vorkömmt. Das ist, es wird eine Gleichung, davon der Factor eine Wurzelgleichung, und der Werth von x, welchen dieser Factor $=0$ gesetzt gibt, die Wurzel ist. Diese Gleichung ist also von dem Grade, von dem das Product ist, und hat soviel Wurzeln, und Wurzelgleichungen, so viel das Product Factoren hat, das ist soviel der Exponent ihres Grades Einheiten hat.

IV. Wenn z. E. $D=0$; so wird $A.B.C.D=0$; welches eine Gleichung vom vierten Grade giebt; ihre vier Wurzelgleichungen sind $A=0$; oder $B=0$; oder $C=0$; oder $D=0$; und daher ihre vier Wurzeln $x=a$; oder $=b$; oder $=c$; oder $=d$. Nähmlich, d statt x in dem Product A. B. C. D; setzen, heißt so viel als in diesem Product den Factor $D=0$ setzen, wodurch das Product $=0$ wird, die übrigen Factoren mögen seyn was sie wollen; und so mit den übrigen.

220. Lehrs. Wenn $x^3+px^2+qx+r=y$ so kann y als ein Product aus drey einfachen Factoren A. B. C; (219) angesehen werden.

Bew. Hier sind die drey Coefficienten p; q; r; gegeben, und soll y mit A. B. C verglichen werden, so setzt man

$p=-a-b-c$; $q=ab+ac+bc$; $r=-abc$;

Man

Man darf aber drey Gröſſen a, b, c, zu bestimmen annehmen, wenn für sie nicht mehr als drey Gleichungen gegeben sind (211) folglich kann man allemahl annehmen, y entstehe aus der Multiplication dreyer Factoren.

221. Lehrs. Wenn P) $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + \pi x^{m-n} + \varrho x^{m-n-1} \ldots + \int x^2 + tx + u = y$ wo die Coefficienten alle als gegeben angesehen werden, so läſst sich y allemahl als ein Product von m einfachen Factoren betrachten.

Bew. Das Product so vieler einfachen Factoren, enthält, erstlich x^m in 1 multiplicirt, und denen, alle niedrigern Potenzen von x, bis mit auf die, welche o zum Exponenten hat, jede mit einem Coefficienten, der durch a; b; c; u. s. w. gegeben ist; dieser Coefficienten sind daher soviel als der niedrigern Potenzen von x; nähmlich m; Nun enthält y nach eben der höchsten Potenz, von x eben diese niedrigeren Potenzen mit eben so viel Coefficienten. Wenn man also jedes Gliedes des Products, dem Gliede von y, das eben die Potenz von x hat, gleich setzt, so bekömmt man eine Gleichung die man mit der nur genannten Potenz dividiren kann, und die folglich eine Gleichung zwischen einem Coefficienten von y, und einem durch a, b, c, . . . gegebenen Coefficienten des Products ist. Solcher Gleichungen giebt es also m; und eben so viel Gröſſen a, b, c, ... enthält das Product aus m einfachen Factoren.

Man

Man kann also soviel solcher Grössen annehmen (211), als ist y als ein Product aus soviel Factoren ansehen.

222. Lehrs. Wenn y; aus m einfachen Factoren A. B. C ... entsteht, so hat es nicht noch einen andern Factor, der unter diesen m nicht zu finden wäre.

Bew. Es sey $x = (x - \alpha)$. Z und ich lasse jetzt noch unausgemacht, ob der in Z multiplicirte einfache Factor unter den andern m zu finden seyn soll: Für $x - \alpha = 0$ wird $x = 0$. folglich A. B. C ... $= 0$ folglich einer dieser m Factoren $= 0$; Weil ein Product nicht $= 0$ wird, wenn gar kein Factor von ihm $= 0$ ist. Dieser Factor von den m; der $= 0$ wird, sey A; also ist zugleich $x - \alpha = 0$ und $x - a = 0$, folglich $x = \alpha$ und $x = a$. Daher ist jeder einfache Factor von y unter den m enthalten.

223. Lehrs. Eine Gleichung von m Graden, hat nicht mehr noch weniger Wurzeln, als m.

Bew. In 221. giebt $y = 0$ gesetzt eine solche Gleichung, die ich P. nennen will. Es ist aber y allemahl ein Product aus m einfachen Factoren (221), und nicht mehrern (222) und jeder Factor für sich allein $= 0$ gesetzt, macht das Product $y = 0$, ist also unter dieser Voraussetzung eine Wurzelgleichung und der Werth von x den man solchergestalt bekommt eine Wurzel der Gleichung P.

224.

224. Lehrs. Wenn man statt der Wurzeln die Gröſſe annimmt die ihnen entgegengesetzt sind, nähmlich $-a$; $-b$; u. s. w. Da die Wurzeln $+a$; $+b$; u. s. w. sind; So ist in der Gleichung P (221) der Coefficient

bey der Potenz; oder des

$m-1$ zweyten Gliedes p = der Summe dieser Gröſſen;

$m-2$; dritten . . . q = der Summe der Producte aus allen Paaren dieser Gröſſen oder allen ihren Verbindungen nach 2;

$m-3$; vierten . . . r = der Summe aller Producte von 3 solchen Gröſsen, oder aller Verbind. dieser Gröſſen nach 3;

$m-4$; fünften . . . s = der Summe aller Producte dieser Gröſſen nach 4;

$m-5$; sechsten . . . t = der Summe aller Producte dieser Gröſſen nach 5;

$$
\begin{array}{rl}
 & (x^3 - 5x^2 - 113x + 693 \\
x - 2 \;\Big|\; & x^4 - 7x^3 - 103x^2 + 919x - 1386 \\
 & x^4 - 2x^3 \\
\hline
 & * \quad -5x^3 - 103x^2 \\
 & \quad -5 \quad +10 \\
\hline
 & \quad * \quad -113x^2 + 919x \\
 & \quad\quad -113 \quad +226 \\
\hline
 & \quad\quad * \quad +693x - 1386 \\
 & \quad\quad\quad +693 \quad -1386 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad * \quad\quad * \\
\end{array}
$$

227. Zuſ.

wenn π die Summe aller Verbindungen nach n von den Gröſſen iſt, welche den Wurzeln der Gleichung P entgegengeſetzt ſind; ſo kömmt zu jeder ſolcher Verbindung, die in π enthalten iſt, noch $-f$ in $-f\pi$; alſo beſtehet $f\pi$ aus allen denjenigen Verbindungen nach $n+1$ der Gröſſen, welche der Gleichung R Wurzeln entgegengeſetzt ſind, in denen $-f$, oder die der Wurzel f entgegengeſetzte Gröſſe enthalten iſt; Aber ϱ beſteht aus alleh Verbindungen nach $n+1$ von den Gröſſen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengeſetzt ſind; d. i. von den Gröſſen, welche allen übrigen Wurzeln der Gleichung R; f, ausgenommen, entgegengeſetzt ſind: Alſo enthält $\varrho - f\pi$ alle Verbindungen nach $n+1$ von allen Gröſſen, welche den Wurzeln der Gleichung R entgegengeſetzt ſind; Es gehört aber $\varrho - f\pi$ in R zu der Potenz $m-n$ wie π in P zu eben der Potenz gehörte: Aus der Gleichung P höchſten Exponenten m; wird $m-n$, wenn man n davon abzieht; Soll eben das aus der Gleichung R höchſten Expouenten $m+1$ werden, ſo muß man von ihm $n+1$ abziehen; alſo iſt π die Summe aller Verbindungen der Gröſſen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengeſetzt ſind, nach der Zahl, die man von der Gleichung P höchſten Exponenten abziehen muß, um $m-n$ zu erhalten; und $\varrho - f\pi$ iſt die Summe aller Verbindungen der Gröſſen, welche der Gleichung R. Wurzeln entgegengeſetzt ſind, nach der Zahl, die man von der Gleichung R höchſten Exponen-

ten abziehen muß, um m—n zu erhalten; daß also das Geſetz für π und für $\varrho - f\pi$ mit Worten ausgedruckt einerley iſt. Oder man kann auch ſo ſagen: π iſt der Coefficient des nten Gliedes von P; und $\varrho - f\pi$ des n+1ten Gliedes von R; Aber π iſt die Summe aller Verbindungen der Gröſſen, welche der Gleichung P Wurzeln entgegengeſetzt ſind nach n; und $\varrho - f\pi$ die Summe aller Verbindungen der Gröſſen, welche der Gleichung R Wurzeln entgegengeſetzt ſind, nach n+1 folglich werden wiederum π in der Gleichung P und $\varrho - f\pi$ in der Gleichung R nach einem Geſetze beſtimmt. Wenn alſo das angenommene Geſetz von einer Gleichung wahr iſt, ſo iſt es von der nächſthöhern wahr. Es iſt aber, wie die Rechnung zeigt, von C (218) wahr; alſo wenn C ſtatt P gebraucht wird, von der Gleichung des fünften Grades, die jetzo R heiſſt; und wenn dieſe Gleichung des fünften Grades nun P heiſſt, von der des ſechsten Grades, die alsdenn R heiſſt, u. ſ. w. ohne Ende.

Ex. Es ſey aus 218. III. Ex.

A) $x^2 + 2x - 99 = 0$
$\quad x - 7 = 0$

B) $x^3 - 5x^2 - 113x + 693 = 0$
$\quad x - 2 = 0$

C) $x^4 - 7x^3 - 103x^2 + 919x - 1386 = 0$

Hier ſind der Gleichung C Wurzeln (219) $a = 9$; $b = -11$; $c = +7$; $d = +2$; die ihnen entgegengeſetzten Gröſſen, -9; -7; -2; $+11$;

+ 11; derselben Summe = — 7; die Summe ihrer Paare 11. — 2; 11. — 7; 11. — 9; — 2. — 7; — 2. — 9; — 7. — 9; = — 103 die Summe ihrer Verbindungen nach dreyen; 11. — 2. — 7; 11. — 2. — 9; 11. — 7. — 9; — 2. — 7. — 9; = + 919; das Product aus allen + 9. — 7. — 2. 11. = — 1386.

225. Zus. Wenn in einer Gleichung das zweyte Glied fehlt, so ist die Summe der Wurzeln = 0; fehlt aber das letzte Glied, so ist eine Wurzel = 0; (3) alsdenn enthält nähmlich jedes Glied die unbekannte Grösse, und wird folglich für sich = 0 wenn man sie = 0 setzt. In diesem Falle lässt sich die Gleichung mit ihr dividiren, und dadurch auf einen Grad niedriger bringen.

Ex. $x^3 * - 31x + 30 = 0$ kömmt aus $(x-1).(x-5)$ oder $x^2 - 6x + 5$ mit $x + 6$ multiplicirt, und hat also + 1, + 5; — 6; zu Wurzeln, da die Summe der beyden bejahten, der verneinten gleich ist.

$y^3 + 7y^2 + 5y = 0$ wird = 0 wenn $y = 0$; und lässt sich auf $y^2 + 7y + 5 = 0$ bringen.

226. Zus. Wenn man eine Gleichung durch eine ihrer Wurzelgleichungen dividirt, so geht die Division auf, und es kömmt die nächstniedrigere heraus, die mit der Wurzelgleichung multiplicirt, die Gleichung hervorbrachte.

$$
\begin{array}{r|l}
 & (x^3-5x^2-113x+693 \\
x-2 & x^4-7x^3-103x^2+919x-1386 \\
 & x^4-2x^3 \\
\hline
 & *\ -5x^3-103x^2 \\
 & \quad -5\ \ +10 \\
\hline
 & \quad *\ -113x^2+919x \\
 & \quad\ \ -113\ \ +226 \\
\hline
 & \quad\ \ *\ \ +693x-1386 \\
 & \quad\ \ \ \ +693\ \ -1386 \\
\hline
 & \quad\ \ \ \ \ \ *\ \ \ \ *
\end{array}
$$

227. Zuſ.

227. Zuſ. Eben ſo gibt eine Gleichung H die ein Product aus zwo andern höhern iſt, durch eine F, dividirt, die andere G;

G) $z^2 - z - 2$

F: $z^3 - 5z^2 - 113z + 693$

H: $z^5 - 6z^4 - 110z^3 + 816z^2 - 467z - 1386$

$z^5 - 5 - 113 + 693$

$* - z^4 + 3z^3 + 123z^2 - 467z$

$- 1 + 5 + 113 - 693$

$* - 2z^3 + 10z^2 + 226z - 1386$

$- 2 + 10 + 226 - 1386$

0

Betrach-

Betrachtungen über die Irrationalwurzeln der Gleichungen.

228. Lehrs. Von einer Irrationalzahl, deren Quadrat rational ist, wie $\sqrt{a}$; ist jede gerade Potenz rational; jede ungerade irrational.

Bew. Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so ist $(\sqrt{a})^{2n} = (a^{\frac{1}{2}})^{2n}$ (Ar. II. 9. 8.) $= a^n$; eine Potenz der Rationalzahl a; folglich rational: Aber $(\sqrt{a})^{2n+1} = (\sqrt{a})^{2n}.\sqrt{a}$ (Arithm. II. 7.) $= a^n.\sqrt{a}$ irrational.

229. Zus. Wenn c eine Rationalzahl bedeutet, so ist in jeder Potenz von $c+\sqrt{a}$; das erste, dritte, u. s. w. jedes ungerade Glied, rational, und das zweyte, vierte u. s. w. jedes gerade, irrational. Erhellt aus 141. c und $\sqrt{a}$ statt des dortigen a und b gesetzt.

230. Lehrs. Von einer unmöglichen Zahl, deren Quadrat möglich ist, wie $\sqrt{-c}$ (36) sind alle gerade Potenzen möglich, alle ungeraden unmöglich.

Bew. Ihr Quadrat ist $-c$; und jede gerade Potenz des Exponentens 2n, ist die Potenz n ihres Quadrats; z. E. die sechste Potenz, wo $n=3$; ist der Würfel ihres Quadrats; also sind alle gerade Potenzen möglich. Jede ungerade ist ein Product aus der nächstvorhergehenden geraden, die möglich war, in die unmögliche Grösse selbst, z. E. $(\sqrt{-c})^5 = (\sqrt{-c})^4.$
$\sqrt{-c}$

$\sqrt{-e}$ und also unmöglich, weil ein Product aus dem Möglichen in das Unmögliche, dem Begriffe der Multiplication gemäß (Art. I. 8.) den unmöglichen Factor eben so enthält wie der mögliche die Einheit, also ihn selbst enthält, folglich unmöglich ist.

Es ist nähmlich $(\sqrt{-e})^{2n} = ((\sqrt{-e})^2)^n$ (Arithm. II. 7.) $= (-e)^n$, positiv oder negativ, nachdem n gerade oder ungerade ist. Aber das Quadrat von $(-e)^n$ allemahl positiv und $= +e^{2n}$ wenn auch $(-e)^n$ verneint ist (31) ferner $(-e)^{2n+1} = (-e)^n . \sqrt{-e}$ (Arithm. II. 7.) $= \sqrt{[((-e)^n)^2 . -e]}$ (26) $\sqrt{(+e^{2n} . -e)} = \sqrt{-e^{2n+1}}$.

231. Zus. In $(c + \sqrt{-e})^n$ sind alle ungeraden Glieder möglich, und alle geraden unmöglich. Jene nähmlich enthalten lauter gerade, diese lauter ungerade Potenzen der unmöglichen Grösse, wie in 229.

232. Zus. Die Sätze 229. 231. gelten auch von $c + b\sqrt{a}$; $c + b\sqrt{-e}$ da der rationale Factor b; nichts in ihrem Beweise ändert.

233. Lehrs. **Wenn $c + b\sqrt{a}$ eine Wurzel einer Gleichung ist, deren Coefficienten alle rational sind, so hat eben die Gleichung auch $c - b\sqrt{a}$ zur Wurzel.**

Bew. Die Gleichung sey $x^3 + px^2 + qx + r$ und der Kürze wegen $\sqrt{a} = \pi$; Man setze $c + b\pi$ statt x; so ist

$$\begin{array}{l|l|l} (c+b\pi)^3 = c^3 + 3c^2 & b\pi + 3c & b^2\pi^2 + b^3\pi^3 \\ p.(c+b\pi)^2 = pc^2 + 2cp & + p & \\ q.(c+b\pi) = qc + q & & \\ r. \quad = r & & \end{array} \quad (F$$

Hier sind nun wegen der rationalen Coefficienten die erste und dritte Columne oder die ungeraden rational, aber die zweyte und vierte oder die geraden irrational (232). Nun können das Rationale und das Irrationale nicht zusammen $= 0$ seyn, oder, welches eben soviel gesagt ist, wenn nun das Irrationale mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens brächte, so kann es dem Rationalen nicht gleich seyn, weil dieses von der Einheit sich ausmessen läßt, jenes aber nicht (Ar. IV. 26.) damit also die Gleichung F; oder die ihr gleichgültige

$$G) \quad \begin{array}{l} c^3 + 3c \\ +pc^2 + p \\ +qc \end{array} \Big| \; b^2\pi^2 = - \left\{ \begin{array}{l} +3c^2 \\ +2cp \\ +q \end{array} \right\} b\pi - b^3\pi^3$$

statt findet, so muß, was in der Gleichung G auf jeder Seite des Gleichheitszeichens steht, für sich $= 0$ seyn, damit sie sich in $0 = 0$ verwandelt. Also ist das Rationale für sich $= 0$; und das Irrationale gleichfalls, oder es ist

$$0 = - \left\{ \begin{array}{l} 3c^2 \\ +2cp \\ +q \end{array} \right\} b\pi - b^3\pi^3$$

oder, der Gleichung F ungerade Columnen, sind für sich zusammen $= 0$; und die geraden Columnen

nen für sich zusammen auch. Wenn man nun $c - b\pi$ statt x setzt, so kömmt eine Gleichung H, heraus, die von F nur darinnen unterschieden ist, daß ihre geraden Columnen, der geraden Columnen in F entgegengesetzte Grössen sind, die ungeraden Columnen aber sind in beyden völlig einerley

$$\begin{array}{lll} (c-b\pi)^3 = & c^3 - 3c^2 & | b\pi + 3c | b^2\pi^2 - b^3\pi^3 \\ p.\ (c-b\pi)^2 = & + pc^2 - 2cp & | \quad + p \quad | \qquad (H \\ q\ (c-b\pi) = & + qc \ - \ q & | \\ r \qquad\quad = & + r & | \end{array}$$

die geraden Columnen der Gleichung F nähmlich sind Producte aus gegebenen Grössen in ungerade Potenzen von $+ b\pi$; und die geraden Columnen der Gleichung H, Producte aus eben den gegebenen Grössen, in eben die ungerade Potenzen von $- b\pi$ d. i. in Grössen, die den geraden Potenzen von $+ b\pi$ entgegengesetzt sind (31). Aber die geraden Columnen beyder Gleichungen sind Producte aus einerley gegebenen Grössen, in einerley geraden Potenzen von $+ b\pi$ oder von $- b\pi$; d. i. in Grössen, die einerley Zeichen haben (31). Sind also die geraden Columnen der Gleichung F für sich zusammen $= 0$; so müssen auch die geraden Columnen der Gleichung H auch für sich zusammen $= 0$ seyn; und die ungeraden Columnen in jeder Gleichung sind auch für sich $= 0$; d. i. wenn die Gleichung F wahr ist, so muß auch H wahr seyn. Es ist klar, daß die cubische Gleichung blos der Deutlichkeit

wegen als ein Exempel ist gebraucht worden, übrigens aber ihre bestimmte Abmessung in den Beweis keinen Einfluß hat. Der Beweis kömmt nähmlich blos auf die Beschaffenheit der geraden und ungeraden Columnen an, die in jeder Gleichung, von welchem Grade sie auch ist, einerley bleibt.

233. Er. In $x^3 - 5x^2 - 8x - 2$ setze man statt x die eine Wurzel $3 + \sqrt{11}$ so kömmt

F) $+27 + 27 \mid \sqrt{11} + 99 + 11\sqrt{11} = 0$
$-45 - 30 \mid \quad -55$
$-34 - 8 \mid$
$-2 \mid$

wo $27 - 45 - 24 - 2 + 99 - 55 = 0$; und $27 - 30 - 8 + 11 = 0$; also die Gleichung noch bleibt, wenn in sie auch $-\sqrt{11}$ statt $+\sqrt{11}$ gesetzt wird.

234. Zus. Eine Gleichung, die $c + b\pi$ zur Wurzel hat, läßt sich durch die quadratische $(x - c - b\pi).(x - c + b\pi)$ oder $x^2 - cx + c^2 - b^2\pi^2$ deren Coefficienten alle rational sind, dividiren (226. 227.).

235. Lehrs. **Eine Gleichung, deren Wurzel $c + b\sqrt{-e}$ ist, hat auch $c - b\sqrt{-e}$ zur Wurzel.** Der Beweis wird aus 231. hergeleitet, wie der 232. aus 229. und ist mit denen 232. völlig einerley, wenn man nur möglich; unmöglich; statt rational; irrational setzt.

236.

236. Zus. Sie läßt sich durch die Gleichung $(x-c-b\sqrt{-e}).(x-c+b\sqrt{-e})$ oder $x^2-2cx+c^2+b^2e$, in der alle Coefficienten möglich sind, dividiren (226. 227.).

237. Lehrs. Jede reine Gleichung (73) von einem geraden Exponenten, hat nur zwo mögliche, entgegengesetzte sonst gleiche Wurzeln: Jede von einem ungeraden nur eine mögliche.

Bew. I. Man setze statt z alle mögliche Zahlen nach der Reihe, so ist klar, daß z^{2n}, und z^{2n+1} wachsen, wenn z wachsen. Wenn nun $z^{2n}-a=0$ oder $z^{2n}=a$; so gebe ein gewisser positiver Werth von z; z. E. c; $c^{2n}=a$; also gibt ein gröſseres z als c war, diese Potenz gröſser als a; und ein kleineres kleiner. Folglich gibt es nur einen positiven Werth von $z=c$ dessen Potenz $2n=a$; ist. Aber $(-c)^{2n}=(+c)^{2n}$ (32) folglich thut eben der Werth negativ genommen, auch der Gleichung genug, und wieder kein anderer negativer.

II. Wenn $z^{2n+1}-a=0$; so gibt es nur einen Werth von z, der $z^{2n+1}=a$ macht, und dieser Werth ist positiv oder negativ, nachdem a in der letzten Gleichung was positives oder negatives ist (31), also hat die Gleichung nur eine mögliche Wurzel.

238. Zus. Die gerade Gleichung hat 2^{n-1} und die ungerade 2n unmögliche Wurzeln (223).

239.

239. I. Exempel. $z^4 - e^4 = 0$; davon sind die zwo möglichen Wurzeln $z = \pm e$ und die Gleichung lässt sich also durch $(z-e).(z+e)$ oder $z^2 - e^2$ dividiren (223). Aus Ar. II. 5. erhellt, daß $z^4 - e^4 = (z^2+e^2).(z^2-e^2)$. Also ist die reine biquadratische Gleichung ein Product aus $z^2 - e^2 = 0$ in $z^2 + e^2 = 0$; der letzten Gleichung Wurzeln sind $z = \pm\sqrt{-e^2}$ und dieses sind auch die unmöglichen Wurzeln der biquadratischen. Es ist nähmlich $(\pm\sqrt{-e^2})^2 = -e^2$ (36) und also $(\pm\sqrt{-e^2})^4 = (-e^2)^2 = +e^4$. Hieraus lässt sich eine scheinbare Ungereimtheit heben. Man kann nähmlich schliessen: $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ (Ar. II. 9.) $= (-1)^{\frac{2}{4}}$ (Ar. I. 68.) $= ((-1)^2)^{\frac{1}{4}}$ (Ar. II. 9.) $= (+1)^{\frac{1}{4}}$ (31) oder $\sqrt{-1} = \sqrt[4]{+1}$; das Unmögliche, wie es scheint, dem Möglichen gleich. Wenn man hier $e = 1$ setzt, so erhellt, daß einer der vier Werthe der Biquadratwurzel $\sqrt[4]{+1}$ der gefundene unmögliche ist; weil diese Biquadratwurzel nicht einen einzigen, sondern vier Werthe, und darunter zweene unmögliche hat. Man setzt also hier nicht eine mögliche Biquadratwurzel etwas Unmöglichen gleich, sondern man findet einen der unmöglichen Werthe der Biquadratwurzel.

240. II. Ex. $y^3 - f^3 = 0$; davon ist gewiß eine mögliche Wurzel $y = f$; also muß sich die Gleichung mit $y - f$ dividiren lassen (227). Man findet aber

$y - f$

$$
\begin{array}{l|l}
y-f & y^3-f^3 \quad (y^2+fy+f^2 \\
 & y^3-fy^2 \\
\hline
 & *\ +fy^2-f^3 \\
 & \quad +fy^2-f^2y \\
\hline
 & \qquad *\ +f^2y-f^3 \\
 & \qquad\quad +f^2y-f^3 \\
\hline
 & \qquad\quad *
\end{array}
$$

Der Gleichung $y^2+fy+f^2=0$ Wurzeln sind $y=-\frac{1}{2}f\pm\sqrt{-\frac{3}{4}f^2}=+\frac{f.(-1\pm\sqrt{-3})}{2}$ die beyden unmöglichen Wurzeln der cubischen Gleichung.

241. So ist für $y^3-8=0$; $f=2$; und die beyden unmöglichen Wurzeln sind $-1\pm\sqrt{-3}$. Es ist nähmlich (Arithm. IV. 28. und hier 26.) $(-1\pm\sqrt{-3})^3=-1\pm\sqrt{-3}-3.-3\mp 3\sqrt{-3}=8$.

242. **Anm.** Diese Exempel zeigen, woher die Mannigfaltigkeit, und die Unmöglichkeit der Wurzeln rühret, und warum die Gleichungen auf den oder jenen Grad steigen. Wer nach der Cubikwurzel der 8 fragt, denkt vielleicht an nichts weiter als an die 2: da aber auser der 2 noch zwo unmögliche Grössen sind, deren Würfel auch 8 ist, so kann er keine Gleichung für die Cubikwurzel der 8 finden, die nicht nebst der 2 auch noch diese beyden unmöglichen Grössen enthielte.

Er

Er fragt nähmlich dreyerley, auch wenn er nur einerley zu fragen glaubt und muß folglich drey Antworten, eine für jede seiner Fragen erhalten. Zugleich fodern zwo von seinen Fragen vermöge 237. II. was Unmögliches, und er bekömmt auch unmögliche Antworten.

243. Lehrs. Wenn s eine ganze Zahl bedeutet, so läßt sich $r^s - 1$ mit $r - 1$ dividiren, daß die Division aufgeht, und der Quotient ist $r^{s-1} + r^{s-2} + r^{s-3} \ldots + 1$ wie sich leicht aus (6) erweisen läßt. Nun sey $r = \frac{b}{a}$ so läßt sich auf eben die Art $\frac{b^s}{a^s} - 1$ mit $\frac{b}{a} - 1$ d. i. $\frac{b^s - a^s}{a^s}$ mit $\frac{b-a}{a}$ oder $\frac{b^s - a^s}{a^{s-1}}$ mit $b - a$ dividiren, und der Quotient ist $\frac{b^{s-1}}{a^{s-1}} + \frac{b^{s-2}}{a^{s-2}} \ldots + 1$; dieser Quotient mit a^{s-1} multiplicirt, gibt $\frac{b^s - a^s}{b-a} = b^{s-1} + ab^{s-2} + a^2 b^{s-3} \ldots + a^{s-1}$.

244.

244. Lehrs. Eben so findet man

$$r+1 \;\Big|\; r^{s}-1 \quad \Big(r^{s-1} - r^{s-2} + r^{s-3} - r^{s-4} \ldots$$

$$r^{s} + r^{s-1}$$

$$* - r^{s-1}$$

$$-r^{s-1} - r^{s-2}$$

$$* + r^{s-2}$$

$$+r^{s-2} + r^{s-3}$$

$$* - r^{s-3}$$

Wo der erste, dritte, u. s. w. alle ungerade Reste verneint sind, und mit r dividirt den zweyten, vierten, u. s. w. alle geraden Theile des Quotienten geben, die also auch verneint sind. Unter diesen Theilen des Quotienten kömmt man auf r^0 oder 1; und zwar auf -1 wenn s gerade ist, weil alle Theile des Quotienten verneint sind, die $s-2$; $s-4$; u. s. w. oder s um was gerades vermindert, zu Exponenten haben, und also in diesem Falle der Theil, der $s-s$ zum Exponenten hat, auch verneint ist. Diese -1 nun mit $r+1$ dem Divisor multiplicirt, gibt $-r-1$; Aber $-r$ war der Rest, der mit r dividirt sie gab; und -1 ist ein Theil des Dividendus, den die Division bisher noch nicht betroffen

troffen hat; folglich iſt das Product der -1 in den Quotienten dem Reſte gleich, und die Diviſion geht auf, der Quotient aber iſt $r^{s-1} - r^{s-2} + r^{s-3} - r^{s-4} \ldots + r - 1$. Wenn aber s ungerade iſt, ſo iſt im Quotienten $+1$ und die Diviſion geht nicht auf. Alſo iſt für ein gerades s; wie in 243. $\frac{b^s - a^s}{b+a} = b^{s-1} - ab^{s-2} + a^2b^{s-3} - a^3b^{s-4} \ldots + a^{s-2}b - a^{s-1}$.

245. Lehnſ. Eben ſo iſt für ein ungerades s; $\frac{r^s+1}{r+1} = r^{s-1} - r^{s-2} + r^{s-3} \ldots + 1$ und $\frac{b^s+a^s}{b+a} = b^{s-1} - ab^{s-2} + a^2b^{s-3} - a^3b^{s-4} \ldots + a^{s-1}$.

246. Lehnſ. Und für ein gerades s; $\frac{r^s-1}{r^2-1} = r^{s-2} + r^{s-4} + r^{s-6} \ldots + 1$ und $\frac{b^s - a^s}{bb-aa} = b^{s-2} + a^2b^{s-4} + a^4b^{s-6} \ldots + a^{s-2}$.

247.

247. Lehns. Wenn A eine Grösse ist, die keine andere Potenz von a, als die deren Exponent die gerade Zahl e ist, enthält, und wenn sich A mit $b^2 - a^2$ dividiren lässt, daß die Division aufgeht; so kann A nichts anders als der Dividendus 246. und folglich der Quotient auch nichts anders als der daselbst gefundene seyn. Wenn P eine Grösse bedeutet, die nichts von a enthält, so soll $A = P \pm as$ seyn. Aber das obere Zeichen für die Potenz von a lässt sich nicht behalten, wenn A sich mit $b^2 - a^2$ soll dividiren lassen. Aus den Regeln der Division nähmlich erhellt (6), daß alle Theile des Quotienten bejaht werden. Jeder Theil gibt, mit dem Divisor multiplicirt, ein Product, dessen erstes Glied dem nächstvorhergehenden Reste gleich ist; aus welchem man diesen Theil gefunden hatte, das zweyte Glied gibt entweder einen neuen Rest, oder wenn es keinen Rest geben, und die Division aufgehen soll, so muß es so groß als das Stück von A seyn, das die Division noch nicht betroffen hatte. Dieses zweyte Glied aber ist allemahl verneint, und kann also dem genannten Stücke von A nicht gleich seyn, wenn solches nicht auch verneint ist.

Nun folgt aus den Regeln der Division, daß der Quotient $\frac{P}{b^2} + \frac{a^2 P}{b^4} \ldots + \frac{a^{2n} P}{b^{2n+2}}$ seyn wird. Soll also dieser Theil des Quotienten der letzte seyn, so ist $\frac{a^{2n} P}{b^{2n+2}} \times - a^2 = - a^s$; d. i. weil P; b; nichts von a enthalten; $2n + 2 = s$; und $P = b^s$; also $A = b^s - a^s$. Dieser Satz ist der umgekehrte (conuersa) von 246. Und eben so lassen sich die übrigen umkehren. Z. E. 245. Soll eine Grösse sich mit $b + a$ dividiren lassen, und von a keine andere Potenz als die vom ungeraden Exponenten s enthalten, so muß sie $P + a^s$ seyn; denn ihr zweytes Glied darf nicht verneint seyn, wenn die Division aufgehen soll, und man findet wie vorhin $P = b^s$; u. s. w.

248. Anm. Dieses gibt allgemein die Gleichungen welche aus der Division der reinen durch die Wurzelgleichungen (239; 240.) entspringen. Es sey b die unbekannte Grösse, wie z (237) und a die gegebene, so ist für eine gerade reine Gleichung der Quotient (246) die Gleichung, welche die unmöglichen Wurzeln enthält, die der gegebenen geraden Gleichung genug thun. Z. E. wenn $s = 6$ so ist $\frac{b^6 - a^6}{b^2 - a^2} = b^4 + a^2 b^2$

$a^2 b^2 + a^4$; und die Wurzeln der Gleichung $b^4 + a^2 b^2 + a^4 = 0$ thun auch der $b^6 - a^6 = 0$ genug. Ist e ungerade, und $b^e \pm a^e = 0$ so sind die Quotienten 243. 245. die Gleichungen, welche die unmöglichen Wurzeln enthalten, jener wenn das obere, dieser, wenn das untere Zeichen in der gegebenen reinen Gleichung vorhanden ist.

249. Anm. Auser diesem Gebrauche haben die gefundenen Sätze auch noch sonst vielfältigen Nutzen, z. E. Zahlen zu finden, die sich mit andern dividiren lassen. Es sey $b = 10$; $a = 2$; $e = 6$; so ist vermöge (247) $\frac{1000000 - 64}{100 - 4}$ eine ganze Zahl $= 10000 + 400 + 16$.

250. Lehns. Das Product P aus einer möglichen Grösse b in eine unmögliche $\sqrt[2n]{-e}$ von der keine niedrigere Potenz, als die $2n$; möglich ist; ist unmöglich.

Bew. Wenn $b.\sqrt[2n]{-e} = P$ so ist $b^{2n}. -e = P^{2n}$; Aber b^{2n} allemahl bejaht (31). Daher P^{2n} verneint (Arithm. 108.) und P unmöglich (33).

251. Lehns. Aufgabe. Eine unmögliche Grösse wie 250. so auszudrücken, daß nur -1 unter den Wurzelzeichen bleibt.

Aufl. Sie ist $\sqrt[2n]{e} \cdot \sqrt[2n]{-1}$ (24) wo der erste Factor in dem e bejaht ist, zweene entgegengesetzte mögliche Werthe hat (237).

252. Lehnsatz. $\sqrt[\alpha\delta]{f} = f^{1:\alpha\delta}$ (Ar. II. 9.) $= f^{1:\delta \, 1:\alpha}$ (Ar. II. 8.) $= \sqrt[\alpha]{\sqrt[\delta]{f}}$ (Ar. II. 9.) oder, wenn sich der Exponent eines Wurzelzeichens in zweene Factoren zerfällen läßt, so kann man jeden der Factoren für den Exponenten eines Wurzelzeichens annehmen, und aus der gegebenen Grösse f; erstlich die Wurzel des einen Exponenten, denn aus dieser Wurzel die Wurzel des andern ausziehen. Wenn $\alpha = 2$; $\delta = 3$; so ist $\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[3]{\sqrt{1000000}} = 100 = 10$.

253. Zus. Es ist gleichgültig, welche Wurzel man zuerst ausziehen will; wie in dem Exempel auch $\sqrt[3]{\sqrt{1000000}} = 10$.

254. Zus. Wenn $f = -1$; α eine gerade Zahl, δ eine ungerade; so ist $\sqrt[\delta]{-1} = -1$ (32. 237.) also $\sqrt[\alpha\delta]{-} = \sqrt[\alpha]{-1}$.

255. Zus. Soll sich dieser letztgefundene Ausdruck nicht weiter auf eben die Art verändern lassen, so muß man α nicht in ein Product aus einer geraden Zahl in eine ungerade zerfällen,

len können; Es muß kein numerus pariter impar seyn; folglich muß es sich blos mit 2 dividiren lassen, d. i. eine Potenz der 2 seyn.

256. Zus. Hieraus erhellt, wie man für eine unmögliche Grösse, die eine Wurzel eines geraden Grades aus — ist, ihren einfachsten Ausdruck findet. Man zerfälle den Exponenten der Wurzel in ein Product, aus der höchsten Potenz der 2 die darinnen zu finden ist, in eine ungerade Zahl, und ziehe aus — 1 nur die Wurzel aus, deren Exponent die Potenz der 2 ist.

So ist $\sqrt[40]{-1} = \sqrt[8]{-1}$ wo $\alpha = 2^3$; $\delta = 5$.

257. Anm. $\sqrt[\delta]{\sqrt[\alpha]{-1}}$ wäre eine ungerade Wurzel aus einer unmöglichen Zahl, also auch unmöglich; daß also auch 253. hier statt findet, ob dieses Verfahren gleich zu der Absicht 256. nicht dienet.

258. Zus. Jede solche unmögliche Grösse läßt sich durch $b^\alpha \sqrt{-1}$ ausdrücken (255); wo ihre Potenz α; möglich und $= -b^\alpha$; jede niedrigere aber, unmöglich ist.

259. Zus. Der unmöglichen Grösse Potenzen 2α; 3α; 4α; ... $n\alpha$, sind möglich, und bejahte oder verneinte Grössen, nachdem n gerade oder ungerade ist (31).

260. Zus. Wenn $m < \alpha$; so ist jede Potenz der unmöglichen Grösse, die kein Vielfaches α zum

Exponenten hat, oder $(\overset{\alpha}{\sqrt{}}-1)^{n\alpha+m} = (\overset{\alpha}{\sqrt{}}-1)^{n\alpha}$ $(\overset{\alpha}{\sqrt{}}-1)^{m}$ (Arithm. II.) unmöglich (250).

261. Lehns. Weil $\sqrt{}-1 . \sqrt{}-1 = -1$ (36) so ist $+1 = -\sqrt{}-1 . \sqrt{}-1$ also $\frac{1}{\sqrt{}-1} = -\sqrt{}-1$ welches in Rechnungen häufig gebraucht wird.

262. Lehns. Wenn man soviel unmögliche nach 258. ausgedruckte Grössen als man will mit einander multiplicirt, nur daß deren keine mit der andern einerley ist, so ist das Product allemahl unmöglich.

Bew. Es erhellt, daß man hier nur das Product der Wurzeln aus -1 betrachten darf, weil die möglichen Grössen vor den Wurzelzeichen in die Wahrheit dieses Satzes keinen Einfluß haben. Der kleinste Exponent einer solchen Wurzel sey α; Weil nun alle Exponenten Potenzen der 2 sind, so kann man die grössern so ausdrükken, $\alpha\beta$; $\alpha\beta\gamma$; $\alpha\beta\gamma\delta$ u. s. w. wo jeder Buchstabe eine Potenz der 2 bedeutet. Nun sey

$\odot)\ \overset{\alpha}{\sqrt{}}-1 . \overset{\alpha\beta}{\sqrt{}}-1 . \overset{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{}}-1 . \overset{\alpha\beta\gamma\delta}{\sqrt{}}-1 = P$ so ist auf beyden Seiten die Potenz α gemacht; (20. und Ar. II. 8. 9.)

$\gamma)\ -1 . \overset{\beta}{\sqrt{}}-1 . \overset{\beta\gamma}{\sqrt{}}-1 . \overset{\beta\gamma\delta}{\sqrt{}}-1 = P$; und

die Potenz γ gemacht, da $(\overset{\beta}{-1}) = +1$ (31)

$\delta)\ +1$.

$\aleph$) $+1.-1.\sqrt[\gamma]{-1}.\sqrt[\gamma\delta]{-1} = P^{\alpha\beta}$ und die Potenz γ gemacht; da $(-1)^{\gamma} = +1$;

Π) $+1.+1.-1.\sqrt[\delta]{-1} = P^{\alpha\beta\gamma}$ und die Potenz δ gemacht, da $(-1)^{\delta} = +1$;

$\mathfrak{C}$) $+1.+1.+1.-1 = P^{\alpha\beta\gamma\delta}$

Wenn die erste, für P gegebene Gleichung; $\odot$; n unmögliche Factoren auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehen hat, so haben sich die ersten $n-1$ in der letzten Gleichung $\mathfrak{C}$; in lauter $+1$ verwandelt. Der erste nähmlich, wird durch die Erhebung auf die Potenz α in der Gleichung $\gimel$ zu -1; und jeder der andern Factoren bekömmt im Wurzelzeichen einen Exponenten, der sein voriger mit α dividirt ist, weil z. E.

$$\left((-1)^{\frac{1}{\alpha\beta}}\right)^{\alpha} = (-1)^{\frac{\alpha}{\alpha\beta}} = (-1)^{\frac{1}{\beta}}$$

Nun wird durch die Erhöhung auf die Potenz β; in der Gleichung $\aleph$ der erste Factor $+1$ weil dieser Potenz gerade ist, und der zweyte -1; ferner durch die Erhöhung auf die Potenz γ; in Π der zweyte Factor $+1$ und der dritte -1; und so werden durch n nach einander folgende Erhöhungen, die ersten $n-1$ Factoren alle $+1$; der letzte aber -1; Also ihr Product verneint. Dieses Product aber ist eine Potenz von P deren

Exponent gerade ist; folglich ist P eine Grösse, von der eine gerade Potenz verneint ist; d. i. eine unmögliche Grösse (33).

265. Aufg. Eine mögliche Grösse zu finden, die sich durch den unmöglichen Factor $b + f^{\alpha}\sqrt{-1}$ für den ich $b + f\pi$ schreiben will, dividiren lässt.

Aufl. Wenn $\alpha = e$, $f\pi = a$; also $-f^{\alpha} = a^{\alpha}$ so ist aus 244. $b + f^{\alpha}$ eine solche Grösse; und der Quotient ist $b^{\alpha-1} - f\pi . b^{\alpha-2} + (f\pi)^2 . b^{\alpha-3} \ldots + (f\pi)^{\alpha-1}$.

266. Zus. Eine mögliche Grösse kann als Theile keine Potenzen von $f\pi$ enthalten, die nicht vielfache von α zu Exponenten haben (260), also ist $b + f^{\alpha}$ die einfachste mögliche Grösse, die den angenommenen unmöglichen Divisor hat. Es ist nähmlich klar, daß man diese Grösse mit andern möglichen multiplicirt könnte, und die Producte eben den unmöglichen Divisor haben würden. Die einfachste aber kann keine andere als die gefundene seyn, weil sich 245. vermöge 247. umkehren lässt.

267. Zus. Die mögliche Grösse, welche sich durch $b + f\pi$ dividiren lässt, lässt sich auch durch $b - f\pi$

$b - f\pi$ (243) und beyder Product $b^2 - (f\pi)^2$ (246) dividiren.

268. Zuſ. Dieſe einfachſte mögliche Gröſſe, hat α unmögliche Factoren; denn wenn man ſie $= 0$ ſetzt, ſo iſt b in ihr die Wurzel einer Gleichung von ſo viel Abmeſſungen, d. i. einer Gleichung die aus ſoviel Wurzelgleichungen entſteht (221); alſo muß $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon}$ ein Product aus ſoviel Factoren ſeyn. Daß aber dieſe Factoren alle unmöglich ſind erhellt daraus, weil $+ f^{\varepsilon}$ allemahl poſitiv iſt, wenn man auch ſtatt f was verneintes ſetzte (31), folglich $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon} = 0$ eine Gleichung iſt, in der b lauter unmögliche Werthe hat, d. i. die aus lauter unmöglichen Wurzelgleichungen entſtehen muß; Alſo muß $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon}$ ein Product ſeyn, das lauter unmögliche Factoren hat, von deren jedem der erſte Theil b iſt.

269. Zuſ. Dieſe unmögliche Factoren, den $b + f\pi$ ausgenommen, geben mit einander multiplicirt den Quotienten (245) und die unmöglichen Factoren, den genannten, und $b - f\pi$ ausgenommen, geben vermöge 267 multiplicirt den Quotienten 246.

270. Exempel. Wenn $\alpha = 4$; ſo iſt $b^4 + f^4$ die einfachſte Gröſſe, die ſich mit $b + f^4\sqrt{-1}$ dividiren läſſt; Sie läſſt ſich auch mit $b - f^4\sqrt{-1}$ dividiren; und folglich auch durch

beyder Product das (nach Art. II. 5.) $b^2 - f^2 \sqrt{-1}$ ist. Der Quotient, der sie durch dieses Product dividirt gibt, ist (aus 246. oder aus Art. II. 5.) $b^2 + f^2 \sqrt{-1}$ der $= 0$ gesetzt $b^2 = -f^2 \sqrt{-1}$ oder $b = \pm f \sqrt{-\sqrt{-1}}$ gibt; Also sind seine beyden Factoren $b - f \sqrt{-\sqrt{-1}}$ und $b + f \sqrt{-\sqrt{-1}}$.

271. Anm. Hier erhellt zugleich, wie $b + f \sqrt{-1}$ viererley bedeuten kann. Es ist nähmlich wegen des doppelten Zeichens jeder Quadratwurzel $(32)_{\cdot\cdot} = b \pm f \sqrt{\sqrt{-1}}$ d. i. entweder $= + f \sqrt{\pm \sqrt{-1}}$ oder $b - f \sqrt{\pm \sqrt{-1}}$ wo jede der beyden letzten Ausdrückungen zweene Werthe enthält.

272. Aus dem bisherigen erhellt folgendes:

I. Wenn jede unmögliche Grösse sich durch $c + f \sqrt{-1}$ ausdrucken lässt, das ist aus einem möglichen Theile (der auch $= 0$ seyn kann,) und einem unmöglichen besteht, so daß im letztern nur eine Quadratwurzel, aus einer möglichen negativen Grösse, enthalten ist, so hat jede Gleichung, in der unmögliche Wurzeln sind, solche paarweise (235) also in gerader Anzahl; oder, wenn eine Gleichung unmögliche Wurzeln hat, so sind derselben 2; oder 4; oder 6; u. s. w. nähmlich allemahl zugleich $c \pm f \sqrt{-1}$.

II. Wenn also die Gleichung als ein Product kann angesehen werden, das unmögliche, einfache Factoren, von folgender Gestalt $x - c - f$

$-f\sqrt{-1}$ enthält, so hat sie mit jedem solchen Factor auch den $x - c + f\sqrt{-1}$ und kann also in quadratische mögliche Factoren zerlegt werden (236).

III. Gäbe es aber unmögliche Grössen die sich nicht auf die Form (I) bringen lassen, so würden von ihnen diese Schlüsse nicht gelten, und man müsste (II) wenn es wahr ist auf andere Art erweisen.

IV. Aus den bisherigen Sätzen, läßt sich dieses nicht beurtheilen. Man kann aber als eine Nachricht hier merken, daß jede unmögliche Grösse sich auf die angegebne Form bringen läßt, und daher (II) allgemein wahr ist. Hr. Euler hat dieses dargethan Recherches sur les racines imaginaires des equations Mem. de l'Ac. de Pr. 1749. p. 222. Seine Beweise gehören aber in die Analysis des Unendlichen, in meiner Einleitung dazu sind die Gründe derselben ebenfalls zu finden, die Ausführung aber ist für ein Handbuch zu weitläuftig. Fuss, tentamen demonstrationis quod omnis quantitas imaginaria ad formam $A + B.\sqrt{-1}$, reduci possit. Acta Ac. Sc. Petrop. 1781. Pars Post. p. 118.

V. Daß in jeder Gleichung die unmöglichen Wurzeln allemahl in gerader Anzahl sind, hat Herr Euler a. a. O. 232 S. ebenfalls gewiesen. Es folgt sehr leicht aus Analysis des Unendlichen 163. I.

Von

Von den Veränderungen, die sich mit der Gleichungen Wurzeln machen lassen.

273. Aufg. Aus einer Gleichung M deren Wurzel x ist, eine N zu machen, deren Wurzel $y = x + c$ ist.

Aufl. Man setze $y - c$ statt x.

Ex. M) sey B 224. wo die neue Wurzel von N; $x + 10$ seyn soll. So ist $c = 10$; $x = y - 10$; und

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 = & y^3 & -30y^2 & +300y & -1000 \\ -5x^2 = & -5y^2 & +100y & -500 & \\ -113x = & & -113y & +1130 & \\ +693 = & & & +693 & \\ \hline 0 = & y^3 & -35y^2 & +287y & +323; \end{array}$$ (N

Der Gleichung M Wurzeln sind hier -11; $+7$; $+9$; der Gleichung N aber; -1; $+17$; $+19$; jede der vorigen nähmlich um 10 vermehrt.

274. Zus. Wenn $+c$ eine bejahte Grösse ist, so werden die bejahten Wurzeln grössere; die verneinten kleinere verneinte Grössen; man setze aber, eine kleinere verneinte Grösse sey grösser als die grössere verneinte. Also werden hiedurch die Wurzeln vermehrt.

275. Zus. Ist $+c$ eine verneinte Grösse, so werden die bejahten Wurzeln kleinere, die verneinten grössere verneinte, d. i. beyde vermindert.

Ex.

Ex. Für voriges M; sey $c = -8$ oder $x = y + 8$

$$x^3 = y^3 + 24y^2 + 192y + 512$$
$$-5x^2 = \quad -5 \quad -80 \quad -320$$
$$-113x = \quad\quad -113 \quad -904$$
$$+693 = \quad\quad\quad +693$$

$$0 = y^3 + 19y^2 - y - 19$$ (N

wo die Wurzeln -19; -1; $+1$; sind.

276. Zus. Durch die Verminderung können aus bejahten Wurzeln in M; verneinte in N werden; wie in 175. aus der Wurzel $+7$ in M, (273) in N die Wurzel $7 - 8 = -1$ wird. Eben so kann die Vermehrung bejahte Wurzeln aus verneinten machen.

277. Zus. Weiß man eine bejahte Zahl, die gröſſer ist als die gröſſte bejahte Wurzel in M; so wird die Wurzel von M um selbige vermindert, eine Gleichung geben, die lauter verneinte Wurzeln hat; und weiß man eine Zahl, die ohne Absicht auf ihr Zeichen betrachtet, eine gröſſere Zahl ist, als die gröſſte verneinte Wurzel in M, auch ohne Absicht auf ihr Zeichen betrachtet, so gibt die Wurzel von M um diese Zahl vermehrt eine Gleichung, die lauter bejahte Wurzeln hat.

Exempel des letztern. In N 275. sind zwo verneinte Wurzeln, unter denen die gröſſte verneinte -19 ist. Man nehme N 275. für M su; oder man seze

M) $x^3 + 19x^2 - x - 19 = 0$.

Hier

281. Aufg. **Aus einer Gleichung, in welcher Glieder fehlen, eine zu machen, die alle Potenzen von der höchsten an nach der Ordnung enthält.**

Aufl. Man setze statt x in der Gleichung $y + e$. Weil in jeder Potenz von $y + e$ alle niedrigere Potenzen von y vorkommen, so erhält man auf diese Art eine Gleichung, wo eine Potenz von y an der Stelle zu finden ist, da eine von x fehlte. In der Gleichung P (221) fehle die Potenz $m - n$; so wird aus ihr

T

$$y^m + mey^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 y^{m-2} .. + \alpha e^n y^{m-n} ...$$

$+ P$

$+ (m-1)\, ep \qquad + \beta e^{n-1} p$

$+ q \qquad + \gamma e^{n-1} q$

$+ \delta e^{n-3} r$

wo α; β; γ; δ; ... die Coefficienten bedeuten, die nach dem binomischen Lehrsatze in jeder der Potenzen m; m − 1; m − 2; m − 3; .... von $y + e$; zu dem Gliede gehören, das die Potenz m − 1 von y hat. So erhellt, daß in T, die Potenz m − n von y zu finden seyn wird, wofern nicht ihr Coefficient = o ist. Wenn aber dieses geschehen soll, so hat man die Gleichung

$$e^n + \frac{\beta}{\alpha} . pe^{n-1} + \frac{\gamma}{\alpha} . qe^{n-2} + \frac{\delta}{\alpha} . re^{n-3} .. = 0$$

wo

wo alle Gröſſen bis auf e nähmlich p; q; r; ... als Coefficienten der gegebenen Gleichung P; und α; β; γ; δ; als Binomialcoefficienten gegeben ſind. Dieſe Gleichung nun hat nicht mehr als n Wurzeln (223), und wenn man alſo ſtatt e etwas ſetzt, das keine von dieſen Wurzeln iſt, ſo wird der Coefficient nicht = o; und die Gleichung T hat das Glied, das in P fehlte.

Ex. P) $x^4 + px^3 + qx^2 + s = o$

T) $x^4 + 4e \left| \begin{matrix} + p \end{matrix} \right. \left| y^3 + 6e^2 \left| \begin{matrix} + 3ep \\ + q \end{matrix} \right. \right| y^2 + 4e^3 \left| \begin{matrix} + 3e^2 p \\ + 2eq \end{matrix} \right. \left| y + e^4 \left| \begin{matrix} + e^3 p \\ + e^2 q \\ + s \end{matrix} \right. \right.$

Sollte hier die erſte Potenz in T wie in P fehlen, ſo wäre $4e^3 + 3e^2 p + 2eq = o$; wo ein Werth von e = o; (225) wenn man nähmlich zu x nichts addirte, da T mit P einerley bliebe; die andern beyden Werthe ſind $e = -\frac{3}{8}p \pm \sqrt{(\frac{9}{64}p^2 - \frac{1}{2}q)}$. Weiß man dieſe Werthe, ſo kann man ſie zu der Abſicht der Gleichung T vermeiden, weiß man ſie nicht, und ſetzt von ungefähr einen von ihnen ſtatt e, ſo würde man ſelbſt dadurch ſehen, was man zu vermeiden hätte.

282. Aufg. Aus einer Gleichung das zweyte Glied wegzuſchaffen.

Aufl. Aus der Gleichung P (221) ſoll man eine machen, in welcher das zweyte Glied fehlt. Man mache aus ihr T (281) ſoll nun in T das zweyte Glied fehlen, ſo iſt $me + p = o$;

$e = -\frac{1}{m}p$; also muß man $y - \frac{1}{m}p$ statt x seßen.

283. Ex. Aus $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ das zweyte Glied wegzuschaffen, seße man $y - \frac{1}{3}p$ statt x; dieses gibt

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & -py^2 & +\frac{1}{3}p^2y & -\frac{1}{27}p^3 = 0 \\ & +p & -\frac{2}{3}p^2 & +\frac{1}{3}p^3 \\ & & +q & -\frac{1}{3}pq \\ & & & +r \end{array}$$

oder

$$\text{T)}\quad \begin{array}{rrrr} y^3 & -\frac{1}{3}p^2y & +\frac{2}{27}p^3 = 0 \\ & +q & -\frac{1}{3}pq \\ & & +r \end{array}$$

284. Wenn P) $x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0$ so ist aus (283), $p = -18$; $q = +87$; $r = -110$ also T) $y^3 * - 21y - 20 = 0$.

285. Zus. Es ist klar, daß durch diese Veränderung der Wurzeln (282) wenigstens eine verneint werden muß, damit aller Summe $= 0$ seyn kann (225).

Die Wurzeln von P 284. sind 2; 5; 11; und die von T.; $2-6$; $5-6$; $11-6$; oder -4; -1; $+5$.

286. Zus. Wenn das zweyte Glied in P wäre, aber andere fehlten, so würde dieses Verfahren solche ersetzen (281) daß sich also auf diese Art nicht mehr als ein Glied wegschaffen läßt.

287. Aufg. Aus P (221) das dritte Glied wegzuschaffen.

Aufl. Man mache T 281. und setze des dritten Gliedes darinnen Coefficienten = 0; so bekömmt man

$$e = \frac{1}{m} P \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} p^2 - \frac{2q}{m.(m-1)}\right)}$$

wo man einen dieser beyden Werthe in $x = y + e$ setzen kann, wenn beyde etwa unmöglich werden, so lässt sich die Auflösung nicht bewerkstelligen.

288. Anm. Das zweyte Glied einer Gleichung schafft man gern weg, weil die Rechnung mit den Wurzeln der Gleichung dadurch verkürzt wird. Z. E. man kann leichter prüfen, was für Zahlen Wurzeln von T. 284. als was für welche dergleichen von P sind. Diese Erleichterung ist bey dem dritten Gliede nicht so beträchtlich, als bey dem zweyten, weil die Potenz der unbekannten Grösse im zweyten höher ist, daher hat diese Aufgabe wenig Nutzen.

289. Anm. Wollte man das vierte, fünfte u. s. w. Glied wegschaffen, so müsste man e aus Gleichungen von höhern Grade als den zweyten finden, welches jetzo nicht in unserer Gewalt, und wegen 288. auch hier von keinem Nutzen ist.

290. Anm. So lässt sich, wenn 289. vorausgesetzt wird, jedes Glied der Gleichung wegschaffen, aber nur eins allein. Man kann auch leicht zeigen, daß keine Methode möglich ist,

die allgemein aus jeder Gleichung alle Glieder bis auf das höchste und das letzte wegschaffte, wie der Herr von Tschirnhausen vergleichen erfunden zu haben glaubte. Gäbe es eine solche Methode, z. E. jede cubische Gleichung (283) in $y^3 + t = 0$ zu verwandeln, so daß x sich finden ließe, wenn man y hätte; so müßte das x der allgemeinen cubischen durch das y der reinen bestimmt werden. Aber das y der reinen hat allemahl zweene unmögliche Werthe (240) und das x der allgemeinen kann lauter mögliche haben, woraus schon zu übersehen ist, daß sich dergleichen Methode nicht erfinden läßt.

291. Aufg. **Aus einer Gleichung** $x^m + qx^{m-2} + rx^{m-3} \ldots + tx + u = 0$ **wo das zweyte Glied fehlt, eine zu machen, wo das letzte Glied ohne eines fehlet.**

Aufl. Man setze $x = \frac{u}{y}$ so kömmt

$$\frac{u^m}{y^m} + \frac{qu^{m-2}}{y^{m-2}} + \frac{ru^{m-3}}{y^{m-3}} \ldots + \frac{tu}{y} + u = 0$$

mit y^m multiplicirt, und mit u dividirt;

$$0 = u^{m-1} + qu^{m-3}y^2 \ldots + ty^{m-1} + y^m$$

in welcher Gleichung, wenn man sie von der rechten Hand gegen die linke liest, das letzte Glied ohne eines fehlt.

292. Aufg. **Bey einer Gleichung die Brüche aus den Coefficienten wegzuschaffen.**

Aufl.

Auflöſ. Man multiplicire die Wurzel der Gleichung nach (280) durch eine Zahl, die ſich durch jeden Nenner der vorhandenen Brüche einzeln dividiren läſſt. Denn weil jeder Coefficient durch eine Potenz dieſer Zahl multiplicirt wird (280), ſo kommen auf dieſe Art Producte ohne Brüche, welche die Coefficienten der neuen Gleichung ſind.

Ex. Bey nachſtehender Gleichung G) ſind der Brüche Nenner; 3; 3. 11; 2. 11; Alſo wird ſich 3. 2. 11. mit jedem dividiren laſſen; dieſes iſt 66; man mache alſo eine Gleichung H wo $y = 66.x$ iſt.

G) $x^3 + \frac{20}{3}x^2 + \frac{100}{33}x + \frac{17}{22} = 0$

1; 3. 2. 11; $(3.2.11)^2$; $(3.2.11)^3$

H) $y^3 + 2.11.20y^2 + 3.11.4.100y + 27.4.121.17 = 0$

Das Product aus allen Nennern läſſt ſich ohne Zweifel durch jeden einzeln dividiren, und kann alſo auch ſtatt dieſer Zahl gebraucht werden, ob es wohl in dem Falle, da die Nenner gemeinſchaftliche Diviſoren haben, oder nicht numeri inter ſe primi ſind, nicht die kleinſte Zahl iſt, die ſolches bewerkſtelliget. In dem Exempel lieſſe ſich auf dieſe Art $3.33.22 = 2178$ ſtatt 66 gebrauchen, welches aber ohne Zweifel viel unbequemer wäre, und eine Gleichung mit viel gröſſern Coefficienten gäbe.

293. Zuſ. So laſſen ſich zuweilen auch Irrationalgröſſen aus den Coefficienten wegſchaffen.

In der nächstfolgenden Gleichung multiplicirt man die Wurzel mit $\sqrt{2}$.

$$x^4 + 7\sqrt{2}\,x^3 * - 10\sqrt{8}\,x + 4 = 0$$
$$1; \quad \sqrt{2}; \quad 2; \quad \sqrt{8}; \quad 4;$$
$$y^4 + 7.2\,y^3 * - 10.8\,y + 20 = 0$$

In der nächstfolgenden dividirt man (280) durch $\sqrt{3}$.

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} * - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1; \quad \sqrt{3}; \quad 3; \quad 3\sqrt{3}$$
$$y^3 - 3y^2 \quad * - 2 \quad = 0.$$

Es erhellt, daß solches allemahl gewisse Umstände bey den Coefficienten voraussetzt, ohne welche dieses Verfahren keinen Nutzen hat. Nähmlich alle Irrationalgrössen in den Coefficienten müssen Potenzen einer einzigen seyn, und gerade an den Stellen stehen, wo die Potenzen der, mit welcher man multiplicirt oder dividirt, in ihrer geometrischen Reihe darunter zu stehen kommen.

294. Aufg. Zu finden, ob eine Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat, und diese ganze Zahlen selbst zu entdecken.

Aufl. Weil das letzte Glied ein Product aus allen den Würzeln entgegengesetzten Grössen ist, so zerfälle man es in seine Factoren: Jeder Factor kann mit den Zeichen + oder — 1 genommen werden, und man muß prüfen, ob er mit einem beyder Zeichen eine Wurzel ist. Hat man diese Proben mit allen Factoren angestellt,

und

und keine Wurzel gefunden, so gibt es keine ganze Zahl, die eine Wurzel der Gleichung wäre.

295. Ex. In nachstehender Gleichung H; ist das letzte Glied $= 24.10 = 3.8.2.5$; Es hat also eine grosse Menge Factoren, die man findet, wenn man alle einfachen $1.3.2.2.2.2.5$ in die es zerfällt, auf alle mögliche Arten verbindet; z. E. $3.2 = 6$; $3.4 = 12$; $3.8 = 24$; $3.16 = 48$; $2.5 = 10$; $4.5 = 20$; u. s. w. Eigentlich muß man alle diese Factoren versuchen. Es ist aber rathsam die kleinsten zuerst vorzunehmen, und das zweyte Glied, wenn es nicht schon fehlt, wegzuschaffen (288). Man setze also nach und nach statt x die verschiedenen Factoren, darunter auch 1 gehört, so sind diejenigen Wurzeln, die $= 0$ geben

x	$x^3 - 124x - 240$ (H
1	$1 - 124 - 240$
+ 2	$8 - 248 - 240$
− 2	$-8 + 248 - 240 = 0$
+ 3	$27 - 372 - 240$
− 3	$-27 + 372 - 240 = 105$
+ 10	$+1000 - 1240 - 240$
− 10	$-1000 + 1240 - 240 = 0$
+ 12	$+1728 - 1488 - 240 = 0$

Also sind die drey Wurzeln -2; -10; $+12$;

296. Zus. Wenn man eine Wurzel hat, und die Gleichung H durch die ihr zugehörige Wurzelgleichung dividirt, so bekömmt man (226) eine Gleichung, bey der sich das Verfahren leich-

ter wiederhohlen läßt, in so fern man keine solche hohe Potenzen, der Zahl, die man versucht, zu machen nöthig hat, und so findet man die übrigen Wurzeln mit geringerer Mühe.

Hätte man in (226) 2 als die Wurzel der dortigen biquadratischen Gleichung gefunden, so gäbe die daselbst angewiesene Division die cubische, deren drey Wurzeln zu entdecken weniger Rechnung erfodert als die übrigen drey Wurzeln der biquadratischen; aber jene drey und diese drey sind einerley. Hätte man auch von der cubischen nur eine Wurzel, z. E. 7 gefunden (Siehe B 224.) so gäbe die Division mit $x-7$; die quadratische Gleichung A; deren Wurzeln man aus 78. finden könnte.

297. Anm. Wer nähmlich von einer cubischen Gleichung eine Wurzel weiß, der weiß sie alle, sollten sie auch gleich irrational seyn, weil er durch die Division eine quadratische Gleichung erhalten und solche auflösen kann.

298. Anm. Das Verfahren (294) ist mühsam, wenn das letzte Glied sehr viel Factoren hat, und kann doch vergeblich seyn. Man hat Arten es abzukürzen.

299. Aufg. Aus einer Gleichung K; eine L zu machen, so daß man die Wurzeln von K weiß, wenn die von L bekannt sind; und daß das letzte Glied von L weniger Factoren hat als das von K.

Aufl.

= : Aufl. Man ſetze eine willkührliche Zahl a, ſtatt x in K; und ſehe, was alle Glieder von H nach dieſer Vorausſetzung zuſammengerechnet, geben. Wenn dieſes eine Zahl iſt, die weniger Factoren hat als das letzte Glied von K, ſo ſetze man $x = y + a$ und mache auf dieſe Art L, wo man, weil das letzte Glied weniger Factoren hat, die ganzen Werthe von y leichter entdeckt als die ganzen Werthe x in K; und aus jenen dieſe finden kann.

K) $x^3 + px^2 + qx + r$
$a^3 + pa^2 + qa + r = D$

L) $y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 = 0$
$+ p \quad + 2pa \quad + pa^2$
$+ q \quad + qa$
$+ r$

Es erhellt nähmlich, daß D allemahl der Gleichung L letztes Glied ſeyn wird, das für K eine cubiſche genommen worden, dient nur als ein Exempel.

300. Ex. Weil 105 = 1. 3. 5. 7 herauskömmt, wenn man −3 ſtatt x in H; 295; ſetzt, ſo ſey $a = -3$; alſo $x = y - 3$ und weil H 295 mit K 299 einerley geſetzt; $p = 0$; $q = -124$; $r = -240$; ſo bekömmt man L) $y^3 - 9y^2 - 97y + 105 = 0$ wo man nur die Factoren 1; 3; 5; 7; und die, welche aus ihnen entſtehen können, verſuchen darf. Man verſuche 1; ſo iſt $1 - 9 - 97 + 105 = 0$ alſo eine Wur-

zel $y = 1$ und folglich eine Wurzel $x = 1 - 3 = -2$ und so findet man die übrigen Wurzeln der Gleichung H; aus den übrigen der Gleichung L.

301. Erkl. Gränzen einer Wurzel heissen die Zahlen, zwischen welche sie fällt; Gränzen der Wurzeln überhaupt, die Zahlen, zwischen denen alle mögliche Wurzeln der Gleichung fallen. Eine positive Zahl, die gröſſer oder kleiner ist als die gröſſte oder kleinste positive Wurzel, heisst die gröſſte oder kleinste Gränze der bejahten Wurzeln, und eine verneinte Zahl, die gröſſer oder kleiner ist als die gröſſte oder kleinste verneinte Wurzel, heisst die gröſſte oder kleinste Gränze der verneinten. Nimmt man kleiner in dem Verstande (274) so ist die gröſſte verneinte Zahl, die kleinste Gränze.

Für H 295 ist $+13$ die gröſſte positive Gränze; -11 die gröſſte negative; oder die kleinste, nachdem man das Wort nimmt.

302. Aufg. Die positiven Gränzen für $x^3 - ax + b = 0$ zu finden, wo die Buchstaben für lauter bejahte Gröſſen angenommen, und erst durch das ihnen vorgesetzte Zeichen verneint werden.

Auflö. Weil $ax = x^3 + b$; so ist $x^2 < ax$ also $x < \sqrt{a}$; Weil $b - ax = -x^3$ so ist $ax > b$ also $x > \frac{b}{a}$.

Ep.

Ex. Für $x^3 - 7x + 6 = 0$ ist $a = 7$; $b = 6$ also $x < \sqrt{7}$ oder $< 2,6$ und $> \frac{6}{7}$; Um also zu finden, ob die Wurzel ganze positive Werthe hat, darf man von den Factoren des letzten Gliedes keine versuchen, die nicht zwischen $\frac{6}{7}$ und 2,6 fallen, d. i. keine als $+1$; $+2$; also hat man 3 und 6 nicht nöthig zu versuchen. Die Wurzeln sind -3; $+1$; $+2$.

Wenn $x^2 - 17x + 360 = 0$ also $a = 17$; $b = 360$ wäre $x < \sqrt{17}$ und $> \frac{360}{17}$ oder > 21 welches sich widerspricht. Nähmlich die Wurzel ist negativ wieder die Voraussetzung.

303. Anm. Auf ähnliche Art verfährt man in andern Fällen. Jede Gleichung mit bestimmten Zeichen der Coefficienten erfordert eine eigene Arbeit; Man ist auch nicht im Stande zu sagen, ob nicht vielleicht die Wurzeln in viel engere Gränzen eingeschlossen wären, als dieses Verfahren angibt: daher ist es nicht nöthig sich hier weiter damit aufzuhalten.

Wie man die irrationalen Wurzeln der Gleichungen durch Näherung findet.

304. Lehrsatz.

Wenn $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$ so gibt jeder bestimmte Werth von x einen einzigen bestimmten Werth von y. Diese Gleichung wird nähmlich zu einer einfachen (58) bestimmten (179) wenn statt x ein bestimmter Werth gesetzt wird, da die Coef-

Coefficienten ſchon beſtimmt ſind. Wenn man alſo nach und nach ſtatt x alle mögliche bejahte und verneinte Gröſſen ſetzt, ſo bekömmt man eine Reihe von Werthen von y; deren allgemeines Glied y (9) hier als eine veränderliche Gröſſe angeſehen wird, wie, wenn man auf der Linie dD 6. Fig. nach der Ordnung AB; AC; AD; u. ſ. w. für die Werthe von y nähme, daß alſo y allemahl den Weg eines Punctes P welcher auf der Linie fortginge, ausdrückte, den er von A aus zurücke gelegt hätte. Hat y eine Zeitlang zugenommen und nimmt nachgehends wieder ab; z. E. iſt es AD geweſen, und wird wieder AC; ſo iſt des Punctes P Weg AD — DC da der letzte Theil verneint iſt (Arithm. L 90.).

305. Zuſ. In dieſer Reihe der Werthe von y kömmt das 0; das auch als ein Werth angeſehen wird, ſovielmahl vor, ſoviel mögliche Wurzeln die Gleichung P (221) hat. Hat dieſe Gleichung unmögliche Wurzeln, ſo kommen ſolche nicht vor, wenn man nur alle mögliche Werthe von x nimmt, und alſo finden ſich auch die ihnen zugehörigen 0, in der Reihe der y nicht.

306. Zuſ. Glieder dieſer Reihe von y kann man finden, wenn man ſtatt x alle ganzen bejahten und verneinten Zahlen ſetzt. Dieſe machen die Reihe der y für ganze Zahlen aus. Zwiſchen jedes Paar Glieder dieſer Reihe fallen noch

unzählich viel y für gebrochene Zahlen, weil zwischen jedes Paar ganze um 1 unterschiedene Werthe von x, unzählich viel fallen, die von einem der beyden nur um eigentliche Brüche unterschieden sind.

307. Zus. Durch dieses Verfahren (306) findet man zuverlässig die ganzen Zahlen, welche Wurzeln der Gleichung P (221) sind. Hat aber diese Gleichung eigentliche oder uneigentliche Brüche zu Wurzeln, so finden sich die ihnen zugehörigen o in der Reihe (306) nicht.

308. Exempel.

I			II				
y		x				y	x
+ 384	−	3					
+ 231	−	2			A	− 53	− 4
+ 240	−	1	C B		+ 53	0	− 3
+ 315		0	+ 6	− 26	+ 27	+ 27	− 2
+ 384	+	1	+ 6	− 20	+ 7	+ 34	− 1
+ 399	+	2	.	− 14	− 7	+ 27	0
+ 336	+	3	.	− 8	− 15	+ 12	+ 1
+ 195	+	4	.	− 2	− 17	− 5	+ 2
0	+	5	.	+ 4	− 13	− 18	+ 3
− 201		6		+ 10	− 3	− 21	+ 4
− 336		7		+ 16	+ 13	− 8	+ 5
− 309		8		+ 22	+ 35	+ 27	+ 6
0		9					
+ 735		10					
+ 2064		11					
+ 4179		12					
+ 7269		13					
+ 11655		14					
+ 17520		15					

Das I. Exempel iſt für $x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 82x + 315 = y$; wo für $x = +5$; und $= +9$; $y = 0$ wird, alſo hat P hier die beyden

Wur-

Wurzeln + 5; + 9; und will $\frac{P}{(x-5).(x-9)}$ $= x^2 + 4x + 7$ (226. 226) so sind die beyden andern Wurzeln $-2 \pm \sqrt{-3}$ (78) und y kann hier nicht mehr als zweymahl $= 0$ werden (305). Das II. Exempel ist für $x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = y$ wo eine Wurzel -3 ist, und $\frac{P}{x+3} = x^2 - 7x + 9$; die Wurzeln $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ oder 5,302..; 1,697 hat, die zwischen 5 und 6; und 2 fallen, so daß für ganze Werthe von x; y nur einmahl $= 0$ werden kann.

309. Unter A; B; C; stehen die ersten, zweyten, dritten Unterschiede der Reihe y; die dritten sind 6, wie (48).

310. Aufg. Die Reihen der Unterschiede (50) von der Potenz m zu finden.

Aufl. Um die Sache allgemein und nicht nur für ganze Zahlen zu untersuchen, wachse x um den unveränderlichen Unterschied e; so daß aus x; $x + e$ werde. So ist $(x+e)^m - x^m = mex^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 x^{m-2}$.. welche Gröſſe ich A 1 nennen will. Sie ist ein allgemeines Glied der Reihe der ersten Unterschiede, oder kürzer zu reden: des ersten Unterschiedes und hat m Theile. Setzt man in ihr

$x + e$

$x + o$ statt x, so bekömmt man dieser Reihe nächstfolgendes Glied, das $A2$ heissen mag. Dasselbe besteht aus m Reihen, jedes Glied in $A1$ gibt hier eine Reihe. Ich heisse höchste Glieder, wo x auf die höchsten Potenzen erhoben ist. Das höchste Glied in jeder der m Reihen von $A2$ ist einerley mit dem Gliede von $A1$ aus dem diese Reihe entstanden ist. Das zweyte Glied in jeder Reihe ist einen Grad niedriger als das höchste; und weil jedes Glied in A, einen Grad höher ist als sein nächstfolgendes, so ist in $A2$; das zweyte Glied jeder Reihe einen Grad höher als das zweyte der nächstfolgenden, derjenigen nähmlich, die aus dem nächstfolgenden Gliede von $A1$ entstanden ist. Die zweyten Glieder der Reihen werden also nach der Ordnung immer um einen Grad niedriger. Nun ist in jeder Reihe das zweyte Glied höher als alle nachfolgenden in eben der Reihe; also ist das zweyte Glied der ersten Reihe als das höchste unter allen zweyten Gliedern, auch das höchste unter allen in $A2$ befindlichen Gliedern aller Reihen, die ersten Glieder der Reihen ausgenommen. Nun nehme man $A2 - A1$ als $B1$; das allgemeine Glied des zweyten Unterschiedes. Durch diesen Abzug heben sich die ersten Glieder der Reihen in $A2$ auf, und bleiben blos ihre zweyten und folgenden Glieder übrig. Unter diesen ist das höchste, das zweyte Glied der ersten Reihe von $A2$; und also ist dieses das höchste Glied von $B1$;

$$A1 = mex^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 x^{m-2} \ldots\ldots$$

$$A2 = me.(x^{m-1} + (m-1)\,ex^{m-2} \ldots)$$
$$+ \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2.(x^{m-2} + (m-2)\,ex^{m-3} \ldots)$$

$$B1 = m.(m-1)\,e^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2} e^3 x^{m-3}.$$

Es sind also die höchsten Glieder
des ersten Unterschiedes mex^{m-1}
des zweyten Unterschiedes $m.(m-1)\,e^2 x^{m-2}$
Setzt man nun $x+e$ statt x in B1; um daraus B2; das folgende Glied des zweyten Unterschiedes zu machen, so gibt wieder jedes Glied von B1, eine Reihe in B2; und es wird $B2 - B - 1 = C1$ der dritte Unterschied. Sein höchstes Glied muß das zweyte Glied der Reihe B2 seyn, die aus dem höchsten Gliede von B1 entsteht. Denn die ersten Glieder der Reihen heben sich durch den Abzug auf, und das zweyte Glied der ersten Reihe, ist wie vorhin höher als jedes zweyte Glied irgend einer andern sey. Daher findet sich das höchste Glied des dritten Unterschiedes $m.(m-1)\,e^2\,((x+e)^{m-2} - x^{m-2})$ oder $m.(m-1).(m-2)\,e^3 x^{m-3}$ der nte Unterschied D1 heisse $\alpha x^{m-n} + \beta x^{m-n-1} \ldots$ daß sein höchstes Glied die Potenz $m-n$ habe, nehme ich an und es ist wenigstens für $n=1$; $=2$; $=3$; richtig, ich will gleich zeigen, daß es dar-

aus auch für alle andere Werthe von n folge. Also ist $D2 = \alpha.(x+e)^{m-n} + \beta.(x+e)^{m-n-1} \ldots$ und der $(n+1)$te Unterschied

$$E1 = D2 - D1 = \alpha.(m-n)\,ex^{m-n-1} \ldots + \beta.(m-n-1)\,ex^{m-n-2} \ldots$$

Hier erhellt wie vorhin, daß der ersten Reihe in D2; zweytes Glied, das höchste unter allen in E1 ist. Es ist aber $= \alpha.x^{m-n}.\frac{(m-n)e}{x}$ oder es ist des nten Unterschiedes höchstes Glied mit $\frac{(m-n).e}{x}$ multiplicirt. Man nehme also für des nten Unterschiedes höchstes Glied folgendes Gesetz an: Ein Product aus allen ganzen Zahlen, wie sie von m an bis mit auf m um die Zahl des Unterschiedes weniger eins vermindert folgen, sey in ein anderes Product multipliciret, dessen beyde Factoren sind: e auf die Potenz erhoben, welcher Exponent die Zahl des Unterschiedes ist, und x auf die Potenz erhoben, welcher Exponent m weniger der Zahl des Unterschiedes ist; d. i. man setze, des nten Unterschiedes höchstes Glied sey $m.(m-1).(m-2)\ldots.(m-n+1)\,e^n x^{m-n}$; so kömmt für das höchste Glied des $(n+1)$ten Unterschiedes $m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1).(m-n).e^{n+1}x^{m-n-1}$ welches unter eben dem Gesetze stehet, unter dem das vorige höchste Glied stand. Ist also das angenommene Gesetz des höchsten Gliedes für einen Werth von n, so ist es auch für den nächstgrössern,

ſetn, und ſo nach der Reihe für alle nächſtgröſſere wahr. Aber es iſt für n = 1; 2; 3; und alſo für jedes n wahr. Daher iſt das höchſte Glied des nten Unterſchiedes m. (m — 1) .... (m — n + 1) $e^n x^{m-n}$ folglich iſt für den mten Unterſchied, wo n = m das höchſte Glied m. (m — 1). (m — 2) .... 1. e^m und weil kein Glied in irgend einem Unterſchiede, x auf Potenzen von verneinten Exponenten erhoben enthält, ſondern jedes Unterſchieds niedrigſtes Glied iſt, das das x^0 enthält, ſo iſt das gefundene höchſte Glied des mten Unterſchiedes zugleich ſein niedrigſtes, oder es iſt der mte Unterſchied ganz. Da nun hier x nicht mehr zu finden iſt, ſo kann man aus dieſem allgemeinen Gliede des mten Unterſchiedes, kein nächſtfolgendes machen, alſo auch keinen m + 1ten Unterſchied finden. Alſo hat x^m; m Unterſchiede, davon der letzte beſtändig iſt. Wenn man alſo von der Reihe x^m; m + 1 Glieder durch die unmittelbare Erhebung der Zahlen x; x + e; x + 2e; x + 3e; .... x + me; auf die Potenz m gefunden hat, ſo geben dieſe m + 1 Glieder; m erſte Unterſchiede, und dieſe erſten Unterſchiede, m — 1 zweyte, und dieſe zweyten m — 2 dritte; und ſo kömmt man immer, die Unterſchiede einer Reihe von einander abgezogen, und daraus die nächſtfolgenden Unterſchiede gefunden, auf zweene (m — 1)te Unterſchiede, die einen mten geben. Da man nun weiß, daß dieſer unveränderlich iſt, ſo addire man ihn zu dem unterſten

$m-1$ten, so hat man einen neuen $m-1$ten, der zu dem untersten $m-2$ten addirt einen neuen $m-2$ten gibt, und so kömmt man durch Addiren auf ein neues Glied der Reihe x^m, wie 48.

311. Zus. Setzt man statt x lauter ganze Zahlen, so ist $e=1$ und der beständige Unterschied $m.(m-1)....1$. (46).

312. Zus. Setzt man in dem Werthe von y (304) $x+e$ statt x; so bekömmt man ein zweytes y, das aus so viel Reihen besteht, so viel Theile wie x^m; px^{m-1}, u. s. w. das erste y hat. Die ersten Glieder dieser Reihen, sind mit den Theilen des ersten y einerley; und das zweyte Glied der ersten Reihe, die aus x^m entsteht, ist höher als jedes zweyte Glied irgend einer andern Reihe. Sucht man also aus diesen beyden y, den ersten Unterschied, von y; so ist desselben höchstes Glied einerley mit dem höchsten Gliede des ersten Unterschiedes von x^m. Aber aus dem höchsten Gliede des ersten Unterschiedes von y, folgen die höchsten Glieder der folgenden Unterschiede, nach eben dem vorhin gebrauchten Verfahren: Also sind diese höchsten Glieder mit den höchsten Gliedern der Unterschiede von x^m einerley, und für $e=1$ ist der mte Unterschied von y, wie 311.

313. Anm. Das II. Ex. 308. erläutert dieses (309) und man findet also aus $m+1$ Gliedern der Reihe y; alle folgenden durch die Addition wie (50). Z. E. der unterste zweyte Unter-

terschied im Exempel ist 22; also sein nächstfolgender $22 + 6 = 28$; und der nächstfolgende erste $35 + 28 = 63$; und der nächstfolgende Werth von $y = 27 + 63 = 90$ der zu $x = 7$ gehört. Wollte man die Reihe hinaufwärts fortsetzen, so wäre der nächste zweyte Unterschied über dem obersten $-26 - 6 = -32$ und der nächste erste Unterschied über dem obersten $53 - (-32) = 53 + 32 = +85$ und das nächste y über dem obersten $-53 - 85 = -138$ für $x = -5$.

314. Grundſ. **Wenn man für x lauter bestimmte Werthe, die sich angeben lassen, lauter endliche Werthe** (Geometr. 12. Satz 12. Zus.) **setzt, so bekömmt man auch y lauter endliche Werthe.**

315. Erkl. **Eine Grösse b fällt zwischen zwo andere a und c;** wenn die Unterschiede $b - a$; $c - a$; beyde einerley Zeichen haben, beyde bejaht, oder beyde verneint sind, und $b - a$ in dem ersten Falle eine kleinere bejahte Grösse, in dem andern eine kleinere verneinte als $c - a$ ist. Es wird nähmlich sowohl b als c aus a dadurch, daß im ersten Falle was bejahtes und im zweyten was verneintes zu a kömmt, und in jedem Falle kömmt weniger bejahtes oder verneintes zu a um b, als um c daraus zu machen. So fällt -7 zwischen -10 und $+1$ weil $-7 - (-10)$ oder $+3$ eine kleinere bejahte Grösse als $+1 - (-10)$ oder $+11$; Und -8

fällt zwischen — 3 und — 12 weil — 8 — (— 3) oder — 5 eine kleinere verneinte Grösse ist, als — 12 — (— 3) oder — 9. Und 8 fällt zwischen 12 und 7 weil 8 — 12 oder — 4 ein kleineres verneintes ist, als 7 — 12 oder — 5.

316. Lehrs. Wenn $x = a$ ein positives y und $x = c$ ein verneintes gibt, so fällt wenigstens ein Werth, $x = b$ zwischen a und c der $y = o$ macht.

Bew. Die bestimmten Werthe a und c, und alle dazwischen fallende geben bestimmte und endliche y. Die veränderliche Grösse y (304) kann aber nicht anders als durch o in das Entgegengesetzte übergehen, wenn sie nicht unendlich werden, wenn sie nicht alle Gränzen übersteigen darf (Geom. 12. S. 14. Zus.), und dieses letztere darf sie hier nicht thun (314), weil alle Werthe von x die zwischen a und c fallen, endlich sind (315). Geht also y zwischen den beyden erwähnten entgegengesetzten Werthen nur einmahl ins Entgegengesetzte, so wird es auch nur einmahl o; Es kann aber solches mehrmahl verrichten. Sein I. Werth kann z. E. bejaht seyn; es kann II. verneint, III. wieder bejaht, IV. wieder verneint werden. Da denn I. und IV. entgegengesetzt sind, und zu a, c, gehören mögen. Hier geht y zwischen I. II. zwischen II. III. zwischen III. IV. also dreymahl durch o. Die Zahl der Durchgänge durch o muß ungerade seyn, weil nur der zweyte, vierte, u. s. w. jeder gerade

Werth

Werth von diesen abwechselnden Werthen verneint seyn kann. Wenn $y = AC$ für $x = a$; und $= Ab$ für $x = c$ 6. Fig. so kann der Punct P (304) nicht anders als durch A in b kommen, d. i. seine andere Weite von A, der Werth y; muß $= 0$ werden, ehe sie der ersten entgegengesetzet wird. Am angeführten Orte der Geometrie ist erinnert, daß der Punct, wenn er von A ohne Ende fort über B; C; D; und alle mögliche Gränzen hinausginge, alsdenn auf der andern Seite nach d; c. u. s. w. kommen könnte. Ich werde dieses an seinem Orte umständlicher erklären. Hier, da ich es nicht brauche, würde es eine nachtheilige Ausschweifung seyn. So geben im II. Exempel 308. die Werthe von x; -5; -4; jener ein bejahtes, dieser ein verneintes y; zwischen sie aber fällt der Werth -3; der $y = 0$ gibt.

317. Zus. Wenn in der Reihe der x (306) eine gewisse ganze Zahl ein bejahtes y und die nächste ganze Zahl ein verneintes gibt, so fällt eine Wurzel (305) zwischen diese beyden ganzen Zahlen. Und so erhellt, daß das Verfahren (305) auch wenn keine Wurzeln ganze Zahlen sind, dient die Gränzen jeder möglichen Wurzel (301) in ganzen Zahlen zu finden, wofern nicht zwischen zwo nächste ganze Zahlen zwo Wurzeln fallen. Denn wenn z. E. eine Wurzel 5, 3; die andere 5, 8 wäre, und $x = 5$, einen bejahten Werth von y gäbe, so gäbe $x = 5,4$ einen verneinten, und $x = 6$ wieder einen bejahten, weil nähmlich

eine Wurzel zwischen 5 und 5,4; die andere zwischen 5,4 und 6 läge. Also entdeckten sich diese beyden Wurzeln durch 306. nicht.

318. Anm. Unter dergleichen Umständen wird es schwer fallen diese Wurzeln zu entdecken; wenn man nicht schon weiß, zwischen welchen ganzen Zahlen sie enthalten sind; alsdenn nähmlich kann man eine dieser ganzen Zahlen um Brüche vermehren, und so die y suchen, welche den x zugehören, die zwischen diese beyden ganzen Zahlen fallen, da sich denn die Wurzeln nach 306. entdecken. Aber diese Arbeit läßt sich nicht zwischen jedem Paare nächster ganzer Zahlen vornehmen: Und wenn die Reihe (306) nirgends o hat, so kann man daraus nur eines von diesen dreyen schliessen: daß alle Wurzeln Brüche, oder daß manche Brüche, manche unmöglich, oder daß alle unmöglich sind (305) welches letzte bey einer Gleichung von einer ungeraden Abmessung, nur von allen bis auf eine gelten kann (272).

319. Aufg. **Wenn man die Gränzen einer Wurzel in ganzen Zahlen hat (317), diese Wurzel bis auf Zehntheilchen genau zu finden.**

Aufl. Man sieht leicht, welcher von beyden Zahlen die Wurzel am nächsten liegen muß, derjenigen nähmlich, deren y am wenigsten von o unterschieden, das kleinste bejahte oder verneinte ist, weil sich der Werth von y nach und nach verändert. Diese ganze Zahl verändere man

nach

nach der Ordnung um 0, 1; 0, 2; 0, 3 u. s. w. so daß man Brüche erhält, die zwischen sie und die andere der beyden ganzen Zahlen fallen. Man suche die y für diese Brüche, so entdecken sich nach (316) die beyden Brüche, zwischen welche die Wurzel fällt. Es müssten denn zwo Wurzeln zwischen ein paar solche Brüche, und folglich zwischen beyde ganze Zahlen fallen (318).

320. Ex. Aus $x^3 - 50x - 120 = y$ wird -8 und $+159$ für $x = 8$ und $= 9$; Also liegt die Wurzel viel näher bey 8 als bey 9; Man setze $x = 8,1$ so kömmt $y = +6,441$ und die Wurzel fällt zwischen 8, und 8,1 daß man sie also 8,0 annehmen darf, wenn man sie nicht genauer als bis auf Zehntheile sucht.

321. Aufg. **Wenn man die Wurzel in Zehntheilchen hat, sich ihrem Werthe so viel man will zu nähern.**

Aufl. und Exemp. I. Im Exempel (320) ist die Wurzel etwas mehr als 8. Also muß zu 8 noch etwas kommen, den Werth der Wurzel zu ergänzen. Man heisse diese noch unbekannte Ergänzung; p, und setze; $x = 8,0 + p$; So kömmt für $y = 0$;

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & 512 + 192p + 24p^2 + p^3 \\ -50x = & -400 - 50 \\ -120 = & -120 \\ \hline A)\ 0 = & -8 + 142p + 24p^2 + p^3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & & & & -12 & & & -8 & & & & \\
 & & q^3 = & & 195112 & + & 10092 & \Big\} r + & 0,0174 & \Big\} r^2 + r^3 & \\
 & & & & -9 & & & & & & \\
+ & 24,15 & q^2 = & & 812406 & + & 0,28014 & \Big\} + & 24,15 & \Big\} & \\
+ & 144,075 & q = & & 0,8375635 & + & 144,075 & & & & \\
- & 0,839875 & = & - & 0,839875 & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$0 = -,0014988988888 + 144,35524092\,r + 24,1674\,r^2 + r^3$$ (C

wornach man nach IV. $r = 0,00001038$ findet.

VIII. Nun addire man die I; V; VI; VII; gefundenen Theile der Wurzel, so kömmt:

IX)
$$\begin{array}{rl} x = & 8, \\ + p = & + 0{,}05 \\ + q = & + 0{,}0058 \\ + r = & + 0{,}00001038 \\ \hline x' = & + 8{,}05581038 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

X. Man sucht nehmlich zu dem ersten Stücke des Werthes von x (320) die Ergänzung p; vermittelst der Gleichung A; Fände man diese Ergänzung völlig, so wäre die Arbeit vollendet. Man findet aber nur ein Stück von ihr (V), also sucht man dieses Stückes Ergänzung q, durch B. Man findet von ihr wieder ein Stück VII, und sucht dessen Ergänzung r durch C; und so findet man von jeder Ergänzung das erste Stück, oder den Anfang und sucht dessen Ergänzung. Die Summe aller dieser ersten Stücken wird sich also dem Werthe der Wurzel immer mehr und mehr nähern.

XI. Der Beweis dieses Verfahrens beruht auf folgenden Betrachtungen: Die Hauptgleichung, deren Wurzel man eigentlich sucht, wie A (I) steige auf soviel Grade man will; und der nach 321. gefundene Theil der Wurzel heisse a; so ist $x = a + p$; Nun heisse der nach IV. gefundene Theil von p; b; so ist (VI) $p = b + q$ und wenn c den nach VII. gefundene Theil von q heisst, so ist $q = c + r$; also $x = a + b + c + r$;

$+ 1$; Es ist klar, daß jede neue Ergänzung zu den schon gefundenen Theilen der Wurzel addirt, x geben soll. Man kann also diese gefundenen Theile der Wurzel zusammen als ein Stück ansehen, so ist offenbahr, daß die Gleichung für jede neue Ergänzung unmittelbar herauskommen müßte, wenn man die Summe aus ihr und dem schon gefundenen Stücke der Wurzel, das ich d nennen will, statt x in die Hauptgleichung setzte, welches das Verfahren (273) ist. Es heisse also eine Ergänzung überhaupt, sie mag die erste, zweyte, dritte, u. s. f. seyn; t und für sie sey M) $0 = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \ldots$ so hat M soviel Abmessungen als die Hauptgleichung; und kömmt aus ihr, wenn man $d + t$ statt x setzt. Also bestimmt jeder Werth von t einen von x; und man könnte aus M alle x vermittelst aller t finden. Man sucht aber nicht alle t; nicht alle Grössen, die zu d kommen müssen, alle x daraus zu machen, sondern nur das t, das kleiner als 1 ist, und zu d gesetzt ein x gibt. Man nehme also an, t in Decimaltheilchen ausgedrückt habe keine höhere Zifer als von der Ordnung $-n$; und die Ergänzung t betrage folglich weniger als eine 1 von der Ordnung $-n+1$.

XII. Die höchste Zifer im Quadrate von t kann nicht höher als von der Ordnung $-2n+1$ seyn. Denn das Quadrat von t muß kleiner seyn als das Quadrat einer 1 von der Ordnung $-n+1$; aber das Quadrat dieser 1 ist eine 1 von der Ordnung $-2n+2$; folglich kann das Quadrat

drat von t, keine 1 und also gar keine Zifer der Ordnung — 2n + 2 enthalten.

XIII. Eigentlich ist das Quadrat der höchsten Zifer in t; von der Ordnung — 2n; aber dieses Quadrat kann zwo Zifern enthalten; wenn seine Wurzel, die höchste Zifer von t, grösser als 3 ist; Also kann des Quadrats höchste Zifer von der Ordnung — 2n + 1 seyn, und der Beweis thut dar, daß was für Zifern auch nach der höchsten in t folgen, doch das Quadrat von t keine höhere Zifer als von der Ordnung — 2n + 1 enthalten kann. Aehnliche Betrachtungen sind Arithm. IV. 13. angestellt worden.

XIV. Der Würfel, die vierte, fünfte u. s. w. Potenz von t, sind kleiner als der Würfel, die vierte, fünfte u. s. w. Potenz einer Einheit von der Ordnung — n + 1; Sie enthalten also keine Zifern von der Ordnung — 3n + 3; — 4n + 4; — 5n + 5; u. s. w. oder ihre höchsten Zifern sind von der Ordnung — 3n + 2; — 4n + 3; — 5n + 4 u. s. w.

XV. Man setze t aus seinem ersten Stücke e und desselben neuer Ergänzung u; zusammen (wie in VI.) die höchste Zifer in e muß von der Ordnung — n; seyn (XI) man nehme an, die niedrigste, soll von der Ordnung — 2n + 2, und die höchste in u von der Ordnung — 2n + 1 seyn. So setze man e + u statt t in M) dieses gibt

N)

N) $o = \alpha + \beta e + \beta u + \gamma t^2 + \delta t^3$ also

O) $-\frac{\alpha}{\beta} = e + u + \frac{\gamma t^2}{\beta} + \frac{\delta t^3}{\beta} = e + E.$

XVI. Wenn der Theil E; bejaht ist, und keine Ziser von der Ordnung $-2n+2$ enthält, so ist der Quotient $-\alpha : \beta$ bis auf die Ordnung $-2n+2$ mit e einerley, wie die Gleichung O zeiget. Aber diese Voraussetzung trifft meistens ein.

XVII. Man kann leicht zeigen, wie richtig sie seyn würde, wenn $\gamma : \beta$; $\delta : \beta$, u. s. w. $= 1$ wären, die Summe der Reihe $t^2 + t^3 \ldots t^n$ betrüge $\frac{t^2 - t^n}{1-t}$ (99) also allemahl weniger als $\frac{tt}{1-t}$ also allemahl weniger als eine Einheit von der Ordnung $-2n+2$. Weil nun u auch kleiner ist als eine solche Einheit (XV), also wäre E gewiß kleiner als eine 2 von dieser Ordnung, das heisst, es enthielte in dieser Ordnung nicht mehr als eine 1 und seine übrigen Zifern wären alle niedriger. Und so hoch könnte E nur steigen, wenn t einer Einheit von der Ordnung $-n+1$ sehr nahe käme, d. i. wenn seine höchsten Zifern ziemlich groß wären.

XVIII. Wäre z. E. $t = 0{,}009999$; wo $n = 3$; und $e = 0{,}0099$; $n = 0{,}000099$ so fände man

$t^2 =$

$t^2 = 0,9998\ldots$

$t^3 = 0,999\ldots$

$E = 0,0001999$

Also hat F eine 1 in der Ordnung $-2n+2$, die hier -4 ist.

XIX. Sind aber die Coefficienten $\gamma:\beta$; $\delta:\beta$; sehr groß, so können die Theile von E in denen sie sich befinden, schon einzelne Ziffern von der Ordnung $-2n+2$ und noch höhere enthalten; wäre z. E. $\delta:\beta = 100000000$ und t wie in XVIII; so wäre δt^3; β grösser als 99 und betrüge also für sich viel mehr als e.

XX. In diesem Falle müssten, wofern die Voraussetzung (XVI) ja noch statt finden sollte, einige Theile von F bejaht, andere verneint seyn, damit sich, soviel als hiezu erfodert wird, in ihnen aufhübe.

XXI. Die Coefficienten (XVIII) werden durch die Coefficienten der Hauptgleichung vermittelst der Arbeiten bestimmt, die man nach und nach vorgenommen hat, um auf M zu kommen. So werden die Coefficienten bey A (I) unmittelbahr aus den Coefficienten der Hauptgleichung, und die bey B (VI) aus den Coefficienten von A, und die bey C (VII) aus den bey B bestimmt. Folglich läßt sich von den Coefficienten bey M nichts überhaupt sagen, weil die Coefficienten der Hauptgleichung auf unzählige Arten mannigfaltig seyn können.

XXII. Ist E eine e entgegengesetzte Grösse, so ändert es allemahl die letzten Zifern in e wenn auch in E keine Zifern wären, die so hoch stiegen als die niedrigsten in e. Es sey $e = 0{,}0099$ und $E = -0{,}000001$ so ist $-\frac{\alpha}{\beta} = e + E = 0{,}009899$; wo also e mit $-\alpha : \beta$ nicht bis auf die Ordnung $-2n+2$ die hier -4 ist übereinstimmen würde, obgleich E keine Zifern in dieser Ordnung hat.

XXIII. Man nimmt also die Voraussetzung (XVI) an, um eine Regel zu haben, auf wieviel Zifern man den Quotienten $-\alpha : \beta$ suchen dürfe. Eigentlich zeigt diese Regel nur, man dürfe ihn nicht weiter suchen, weil E meistens Zifern von der Ordnung $-2n+1$ und gewiß von der $-2n$ enthält, wofern sich nicht etwa durch ganz besondere Verhältnisse der Coefficienten bey den Theilen von E; diese höchsten Zifern, die in einem und dem andern gewiß einzeln zu finden sind, bey der Zusammensetzung aufheben.

XXIV. So wäre also der Nutzen dieser Regel doch der, uns die Mühe zu ersparen, daß wir die Division nicht bis auf Zifern fortsetzen, die zuverlässig unbrauchbar seyn würden.

XXV. Wenn man aber auch, indem man sie beobachtet, fehlte, oder wenn man sie selbst nicht recht beobachtete, so wird doch der Fehler, wofern man sonst nach den gegebenen Vorschriften verfährt, allemahl nur kleine Brüche betragen,

und durch die folgende Ergänzung verbessert werden. Hat man nähmlich das Stück von c, das man bey gegenwärtiger Arbeit finden sollte, kleiner angenommen, als man es hätte annehmen sollen, so wird das fehlende in der folgenden Ergänzung enthalten seyn: Ist es aber zu groß angenommen worden, so wird die folgende Ergänzung der vorhergehenden entgegengesetzt seyn, um dieses, was zuviel war, zu vermindern.

XXVI. Da setze man in (VI) $p = 0{,}056 + q$; dieses gibt

$$\begin{array}{rlll} & p^3 = 0{,}000175616 & + 0{,}009408\,q \ldots & \\ + 24\,p^2 = & 0{,}075264 & + 2{,}688 & \\ + 142\,p = & 7{,}952 & + 142\,q & \\ - 8 = & -8 & & \\ \hline 0 = & -0{,}027439616 & + 144{,}697408\,q \ldots & \end{array}$$

daraus findet sich $q = -0{,}00018\ldots$

$p = +0{,}056$

gibt $p + q = +0{,}05758$

Weil nähmlich in q noch Ziffern nach der letzten 8 folgen sollen, so ziehe ich diese 8 so ab, als wenn die Ziffer unter ihr in p eine 0 über die man weggeborgt hat, eine 9 wäre; und so kommen die Ziffern für $p + q$ hier, wie nach der regelmässigern Rechnung (IX).

XXVII. Die zuverlässige Probe der ganzen Arbeit ist, wenn man $a + b + c \ldots + t$ (XI) oder das erste Stück der Wurzel und die Ergänzungen, soviel man ihrer hat, zusammen statt x

in die Hauptgleichung setzt. Alsdenn müssen alle Glieder der Hauptgleichung zusammengerechnet eine Grösse von eben dem Zeichen geben wie alle Glieder der Hauptgleichung geben, wenn man in sie a statt x setzet, und jene Grösse muß weniger von 0 unterschieden seyn, als diese Werthen nähmlich die erwähnten Grössen von verschiedenen Zeichen, so läge die Wurzel zwischen den beyden angenommenen Werthen von x (316).

XXVIII. Dieses Verfahren verdoppelt ordentlich die Menge der schon gefundenen Ziffern, und führt also bald sehr weit, wenn man nur die ersten gefunden hat.

XXIX. Man kann sich desselben auch zu Ausziehung der Wurzeln bey reinen Gleichungen bedienen. Es sey $\sqrt[3]{2} = 1,259 + p$ so ist $2 = 1,995616979 + 4,755243p + 3,77p^2 + p^3$ also kömmt für p (Ar. III. 14.)

4,755243	0,004383021	(0,000921
	4279716	
	103305	
	95104	
	8201	
	4755	
	3446	

und die Cubikwurzel 1,259921

XXX.

XXX. Man hat verschiedene andere Arten die Aufgabe aufzulösen. Alle kommen im Grunde darauf an, daß sie Ergänzungen suchen. Die gegenwärtige scheint mir die bequemste. Sie ist in Newtons Method of Fluxions Introd. §. 19. zu finden. Man sehe auch Halleys Methodum inueniendi radices aus den philosophical Transactions im Anhange zu Gravesands Ausgabe von Newtons Ar. vniuersali p. 245.

Anm. Weil man hie der Wurzel sich nicht anders nähert, als nur vermittelst Decimalbrüche, so würde man auch einer rationalen, die ein bestimmter Bruch wäre, sich nur nähern, nicht sie völlig genau angeben, wenn der Bruch sich nicht genau durch eine endliche Menge Decimalzifern ausdrucken liesse. Da nun wohl keine Methode zu finden ist, von einem Bruche der einer Gleichung rationale Wurzel ist, Zähler und Renner zu entdecken, so kann eine Gleichung rationale Wurzeln haben, die wir nicht anders als durch Näherung anzugeben im Stande sind.

Von den krummen Linien.

322. Erkl. In einer Reihe von Grössen, erfolgt das Wachsthum oder das Abnehmen derselben, nach dem Gesetze der Stetigkeit (lege continui) wenn nach jedem Gliede der Reihe eines folget, oder vor ihm vorhergehen kann, das so wenig als man nur will von dem angenommenen Gliede unterschieden ist, so daß der Unter-

schied zweyer nach einander folgenden Glieder, weniger als jede gegebene Grösse betragen kann. Im Halbkreise AKB 7. Fig. sind die Perpendikel auf den Durchmesser Dd; Ee; Ff. als die Sinus der Bogen AD; AE; AF, in einer solchen Reihe. Zwischen jedes Paar nähmlich, wie Dd; Ee; läßt sich ein Perpendikel Gg setzen, so daß, der Unterschied jedes Sinus Dd von seinem nächstfolgenden kleiner als jede gegebene Grösse werden kann. Der Sinus eines Bogens ist also eine Grösse, die sich nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert. Bedeutet y das allgemeine Glied einer solchen Reihe (9) so nennt man y eine veränderliche Grösse. Wenn von einem Gliede m, bis zu einem andern n, die Glieder beständig wachsen ohne dazwischen abzunehmen, so ist jede Grösse, die gröſſer als m und kleiner als n ist, ein Glied der Reihe zwischen m und n.

323. Erkl. Eine veränderliche Grösse y; die auf was für Art man will durch eine andere veränderliche Grösse x; und Grössen die immer einerley Werth behalten, wenn gleich x und y andere Werthe bekommen, durch beständige Grössen, bestimmt wird; heißt eine Function von x.

Ist zwischen x und y eine Gleichung gegeben, so ist diese Gleichung eine unbestimmte (179), die bestimmt wird, wenn man eines der beyden als gegeben annimmt (180).

Ist

Ist jede dieser beyden bestimmten Gleichungen rational (191) so ist jede der beyden Gröſſen, eine algebraische Function der andern. Alsdann nähmlich, kann die Gleichung nach (192) so geordnet werden, daß sie lauter Glieder enthält, in denen jede Potenz von y, und eben so jede Potenz x, ganze bejahte Zahlen sind. Man kann sie ordnen nach welcher dieser beyden Gröſſen man will (194).

324. Ex. Es sey 7. Fig. Ad = x; dD = y; AB = a; so ist $y^2 = x.(a-x)$ (Geom. 31. S.) dieses bleibt noch wahr, wenn x nach der Reihe Ad; Ag; Ae; Af; jedes Stück des Durchmessers von A an gerechnet, und y nach der Reihe dD; gG; eE; fF; das Perpendikel durch das Ende jedes Stückes bedeutet. Also ist y ein allgemeines Glied der Reihe der Perpendikel, und x ein allgemeines Glied der Reihe der Stücken des Durchmessers. Nun wird y allemahl durch x und die unveränderliche Gröſſe a bestimmt, welche letztere nähmlich einerley bleibet, x mag bedeuten welches Stück des Durchmessers es will. So ist y eine Function von x.

325. Zus. Wenn sich x ändert, muß sich y ändern, weil sonst eines durch das andere nicht bestimmt würde. Ich sage damit nicht, daß jeder andere Werth von x einen andern von y geben müsse, denn wenn C des Kreises Mittelpunct und Cδ = Cd ist, so gehören gleiche, d. i. hier einerley y, oder dD = δΔ zu Ad; Aδ; als ver-

schiedenen x. Ich behaupte nur so viel, daß der Reihe der x eine Reihe der y zugehören müsse, deren Glieder sich nach dem Gesetze, wie y durch x bestimmt wird, ändern.

326. Zus. y kann durch x so gegeben seyn, daß einem x mehr als ein y zugehört. So gehören in der 7. Fig. zu jedem Ad; zwey dD die von d nach entgegengesetzten Seiten des Durchmessers liegen, und also einander entgegengesetzt sind (Arithm. I. 90.).

327. Es sey $y^2 = 10y - x^2$ oder $y = 5 \pm \sqrt{(25 - x^2)}$. So gibt es für jedes x ein y wenn das obere Zeichen bey der Wurzelgröße, und eines, wenn das untere gebraucht wird. Es gibt also für die Reihe der x; zwo Reihen von y; die erste Reihe, deren jedes Glied $5 + \sqrt{(25 - x^2)}$ und die andere, deren jedes Glied $5 - \sqrt{(25 - x^2)}$ heißt. So gehören zu $x = 4$; $y = 5 \pm \sqrt{(25 - 16)}$ d. i. 5 ± 3; oder $y = 8$ und $y = 2$; also zu

$x =$	-5;	-4;	-3;		-2;	-1;	0
y d. I. R. $=$	5;	8;	9;	$+9{,}582$;	9,898;	10
d. II. R. $=$	5;	2;	1;	$+0{,}418$;	0,102;	0

zu $+1$ und -1; $+2$ und -2; $+3$ und -3 u. s. w. gehören gleiche y, (31) also wird jede Reihe für die positiven x von dem Werthe, den ihr y für $x = 0$ hat, eben so fortgehen, wie sie von eben dem Werthe an, rückwärts für die verneinten, fortgehet. In der 8. Fig. sind

x =

$x = At; Af; Ar; Aq; Ap; o$

$y.I.R. = tK; f\Phi; rE; q\Delta; pA; AB$

$y.II.R. = tK; f\varphi; rs; qd; p\lambda; o$

Eben ſo groſſen entgegengeſetzten x; $AP = Ap$ u. ſ. w. gehören eben die Reihen von y; $PL = p\Lambda$; $Pl = p\lambda$; $QD = q\Delta$ u. ſ. w. zu. Alle die Endpunete der y für alle x; wenn man die y durch Perpendikel auf tT durch die Enden der zugehörigen x ausdrückt, liegen in einem Kreiſe, deſſen Durchmeſſer $AB = 2BC = 10$; denn es ſey überhaupt $AS = x = Of$; $Sf = y = AO$ ſo iſt $OB = 10 - y$ und $AO.OB = Of^2$ oder $(10 - y).y = x^2$ oder $10y - y^2 = x^2$.

328. Zuſ. Wenn in der Gleichung zwiſchen y und x; die erſte Gröſſe bis auf die Potenz n ſteigt, ſo gehören zu jedem beſtimmten Werthe von x; n Werthe von y (223) darunter vielleicht unmögliche ſeyn können. Und ſo gehören zu der Reihe von x; n Reihen von y. Es kann auch zu einem y mehr als ein x gehören, wenn x auf eine höhere Abmeſſung ſteigt; nähmlich x kann auch als eine Function von y betrachtet werden. Wenn 2; 3; 4; u. ſ. w. Werthe von y zu jedem x gehören, ſo ſagt man: y ſey eine functio biformis, triformis, quadriformis, u. ſ. w. von x.

329. Zuſ. Man nehme 9. Fig. auf einer geraden Linie, AP einem gewiſſen Werthe von x gleich, man ziehe durch P, in einem willkührlichen

Winkel, eine gerade Linie, und nehme auf solcher PM dem zugehörigen y gleich. Wenn man AQ; AR; AO; andern Werthen von x gleich nimmt; durch Q; R; O; Parallelen mit PM zieht, und auf solchen die Längen QN; RS; OL; den zugehörigen y gleich nimmt, so befinden sich die Puncte; L; M; N; S; in einer geraden oder krummen Linie, welche solchergestalt die Endpuncte aller y enthalten wird.

330. Zus. Hat y für ein x mehr als einen Werth, z. E. noch Pm; Pμ; für x = AP; so gehören die Puncte lmnſ; λμνσ; zu andern Reihen von y (327) aber zu eben der krummen Linie, die nähmlich die Endpuncte aller y enthält, wenn x durch alle mögliche Werthe geht. In der Figur wäre y eine functio triformis von x (328).

331. Erkl. Die Linie, auf welcher die Werthe von x (329) genommen werden, heiſſt die Abſciſſenlinie; und beſonders die Axe, wenn der Ordinatenwinkel APM ein rechter iſt. Die Stücken AP; oder AQ; u. ſ. w. heiſſen Abſciſſen, die ihnen zugehörigen PM; Pm; Pμ; oder QN; Qn; Qν; Ordinaten (ordinatim applicatae) A der Anfang der Abſciſſen; deren Functionen die Ordinaten ſind (323) Ordinaten und Abſciſſen zuſammen Coordinaten; wenn ſie ſenkrecht auf einander ſtehen, rechtwinklichte Coordinaten.

332.

332. Zus. Abscissen, die auf entgegengesetzte Seiten ihres Anfangs fallen, wie AP; AO sind einander entgegengesetzt (Ar. I. 90.). Ein Punct nähmlich, der von A ausginge und die Abscisse AP beschrieben hätte, müsste den Weg PA zurück, und über A hinaus gehen, um AO zu beschreiben. So würde man jene Abscisse als ein bejahtes x; diese als ein verneintes ansehen können.

333. Zus. Ordinaten, die nach entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie zu liegen wie Pm; Pμ; sind einander entgegengesetzt. Stellt jene ein positives y vor, so wird diese ein negatives bedeuten. Dieses erhellt bey den genannten Ordinaten, die auf einer Linie liegen, wie 332. daß aber auch PM und Oλ entgegengesetzt sind, zeigt sich so: Oλ ist eine Grösse von entgegengesetzter Art, als sie seyn würde, wenn sie auf die andere Seite der Abscissenlinie fiele, wie OL fällt; Alsdenn aber würde sie der PM nicht entgegengesetzt seyn; folglich ist sie ihr jetzo entgegengesetzt.

334. Zus. Wenn auch gleich die Ordinaten nicht beständig allein wachsen, oder abnehmen, sondern bald wachsen, bald abnehmen, wie die Ordinaten des Kreises 7. F. von A bis an CK zunehmen, und von dar bis an B wieder abnehmen, so lässt sich doch bey jeder Ordinate dD; 7. Fig. eine andere wie fF zu eben der Reihe (327) gehörige so nahe bey jener annehmen, daß von jener zu dieser die Ordinaten beständig wachsen, oder beständig abnehmen.

335.

335. Erkl. Eine Gleichung für eine Linie heißt eine Gleichung zwischen x; y und beständigen Größen (323; 329).

336. Zus. Wenn in dieser Gleichung ein bestimmter Werth für x angenommen wird, so ist y bestimmt, d. i. der Punct oder die Puncte der Linie sind bestimmt, die dieser Abscisse zugehören. So sind 9. Fig. M; m; μ; durch AP; und N; n; ν; durch AQ u. s. w. bestimmt. Man setze AP statt x; so sind PM; Pm; Pμ; die Werthe von y; Man setze AQ statt x; so sind: QN; Qn; Qν; die Werthe von y u. s. w. Exempel sind 325. 327. Da nun jeder Punct der Linie in einer Ordinate ist, und dieser Ordinate eine Abscisse zugehöret, so bestimmt man auf diese Art alle Puncte der Linie, wenn man x durch alle möglichen Werthe gehen läßt. Man zieht nähmlich durch das Ende der angenommenen Abscisse eine gerade Linie in dem gegebenen Ordinatenwinkel, und nimmt auf ihr y von der Größe, wie es die Gleichung bestimmt.

337. Zus. Es ist also kein Punct in der Linie, der sich nicht aus der Gleichung bestimmen ließe; und die Gleichung ist eine Erklärung der Linie, aus der sich alles muß herleiten lassen, was der Linie zukömmt.

338. Zus. Man kann eine andere Abscissenlinie annehmen, und auf sie durch eben die Puncte der krummen Linie andere Ordinaten ziehen. Zwischen diesen Coordinaten wird eine andere Glei-

Gleichung statt finden, als zwischen den vorigen, und so kann einerley Linie verschiedene Gleichungen haben; eben wie man von einerley Sache verschiedene Erklärungen geben kann, da eine von dieser Eigenschaft, die andere von einer andern hergenommen ist.

In 327. sind AQ; QD; die Coordinaten x; y; für den Punct D. Man nehme Kg = u; gD = z für Coordinaten an; welche eben dem Punkte D zugehören; so ist $y = z + r$; $x = u - r$; diese Werthe in die Gleichung 327 gesetzt geben $z^2 = 2ru - u^2$ eine andere Gleichung für eben den Kreis, wo die Abscissen auf dem Durchmesser xK von seinem Ende x an gerechnet werden, wie in 324.

339. Willk. S. Die veränderlichen Grössen werden mit den letzten Buchstaben des Alphabets x; y; z; angedeutet; die beständigen mit den ersten. Auch soll, wenn es nicht anders erinnert wird; x die Abscisse; y die Ordinate bedeuten.

Die gerade Linie.

340. Aufg. Die Linie zu finden, welche der Gleichung $y = \frac{bx}{a} + c$ zugehört.

Aufl. AP; PM; und AQ; QN 10. F. sind Coordinaten; die bejahten Abscissen sollen rechter Hand ihres Anfangs, und die bejahten Ordinaten

linaten über die Abscissenlinie fallen: Auch mögen jetzo a; b; c; bejahte Gröſſen bedeuten.

Weil $y = c$ für $x = o$; so sey AB $= c$ mit den Ordinaten parallel, und der Punct B wird in der gesuchten Linie seyn.

Weil $x = -\frac{ac}{b}$ für $y = o$; so nehme man AQ $= \frac{ac}{b}$ und O ist auch in der Linie.

Weil $y - c = bx : a$ so ist $y - c : x = b : a$ = AB : OA. Man ziehe durch B eine Parallele mit der Abscissenlinie, welche die Ordinaten in S; T; schneide, so ist MS $=$ MP $- c$; NT $=$ NQ $- c$; BS $=$ AP; BT $=$ AQ; BSM $=$ APM (§. 219) $=$ AQN $=$ BTN; also MS : BS $=$ b : a $=$ NT : BT $=$ BA : AO folglich $\triangle$ OBM $\sim \triangle$ TBN (Geom. 28. S.) also SBM $=$ TBN (Geom. 27. S. Zus.) oder BM; BN fallen in eine gerade Linie, welche mit BT den Winkel MBS $=$ BOQ macht, und also wegen der Parallelen BT; OQ, die verlängerte OB ist. Nun sind PM, QN; willkührlich angenommen; also gilt dieses von allen Ordinaten, oder die Gleichung gehört für die gerade Linie OB.

341. Zus. Den verneinten Abscissen wie AR, $= -\frac{ac}{b} - e$ gehören verneinte Ordinaten RV $= \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{ac}{b} - e\right) + c = -c - be : a + c = -be : a.$

342.

342. Zuſ. Für die Gleichung $y = bx : a - c$ wäre $x = + ac : b$ für $y = 0$, oder O der Durchſchnitt der geraden Linie mit der Abſciſſenlinie, viele rechter Hand des Anfangs der Abſciſſen. Hier iſt nähmlich c dem vorigen (340) entgegengeſetzt.

343. Zuſ. Die Gleichung (340) begreift alle in ſich, wo x; y; nur von der erſten Potenz, und nicht mit einander multiplicirt ſind. Die $y = bx : a$ iſt ein beſonderer Fall für ſie, wo $b = 0$; Es iſt alſo eine allgemeine Gleichung vom erſten Grade, und ſie, in dieſer Allgemeinheit betrachtet, oder auch jede Gleichung vom erſten Grade, gehört für eine gerade Linie. Daß b, a, c, verneint ſeyn können, verſteht ſich.

344. Zuſ. Wenn $BS = AP = x$, $SM = y - c = z$; ſo iſt $z = \frac{bx}{a}$ eine andere Gleichung für eben die gerade Linie, weil eine Linie mehr als eine Gleichung haben kann (338), die erſten Coordinaten ſind hier AP; PM; die zweyten BS; SM.

345. Aufg. Eine Gleichung für eine gegebene gerade Linie VN 10. Fig. zu finden.

Aufl. Man ziehe nach Gefallen eine Abſciſſenlinie CD, auf der man A für den Anfang der Abſciſſen annehme. Von einem willkührlichen Puncte M der gegebenen geraden Linie, ziehe man MP welche die Abſciſſenlinie in P unter einen willkührlichen Winkel MPA ſchneidet; ſo iſt

AP

AP = x; PM = y. Die beyden Linien sollen einander in O. schneiden; so ist der Winkel O gegeben, und O; A; sind gegebene Puncte, jener weil der Durchschnitt zwoer gegebener geraden Linien allemahl gegeben ist, dieser weil man ihn nach Gefallen angenommen hat. Man ziehe AB mit PM parallel; Sie wird auch gegeben seyn, weil in dem Dreyecke OBA; die Seite OA nebst den Winkeln O; A; (= APM) gegeben sind (Geom. 3. S.). Es sey also AO = n; AB = m so ist OP = m + x; und OA: AB = OP: PM (Geom. 25. S.) oder m: n = m + x: y oder $my = mn + nx$ oder $y = \frac{nx}{m} + n$ diese Gleichung nun ist mit der 337. einerley, wenn man ac: b statt m; und c statt n setzt; Also hat die gerade Linie keine andere allgemeine Gleichung (342) als die 340. gefundene.

346. Zus. Der Quotient $\frac{y}{x} = \frac{n}{m} + \frac{n}{x}$ kann dem Werthe seines unveränderlichen Theiles $\frac{n}{m}$ so nahe kommen als man nur will; so daß der Unterschied n: x weniger als jede gegebene Grösse, so klein sie auch gegeben wird, beträgt; denn x kann ohne Ende wachsen, und alle gegebene Grössen übersteigen, aber n bleibt unverändert. Man kann also den Quotienten y: x allemahl so wenig als man nur will von n: m unterschieden annehmen, wenn man nur x groß genug annimmt.

347.

347. Zus. Dieses wird so ausgedrückt: Für ein unendliches x ist $y : x = n : m$; und man sieht da $n : x$; etwas Endliches mit was Unendlichem dividirt, als eine Grösse an, die verschwände, und in Vergleichung mit $n : m$ für nichts zu achten wäre. Es ist leicht zu sehen, daß eigentlich hier nur eine Näherung ohne Ende statt findet, wie (108).

348. Zus. Man lasse sich die Linie VN um den Punct B drehen, daß der Winkel OBA grösser wird; so rückt O immer weiter von A welcher seine Stelle nicht ändert; oder OA wird gröſſer, und kann auf diese Art alle Grössen, die sich nur angeben lassen, übersteigen. Weil nun AB ungeändert bleibt, so wird der Quotient $n : m$ immer kleiner und kleiner und kann kleiner als jede Grösse werden, die sich angeben läſſt, imgleichen wenn x einen gewissen bestimmten Werth bekömmt, wie groß er auch seyn mag, so kann allemahl $nx : m$ kleiner als jede Grösse werden, die sich angeben läſſt, wenn nur m oder AO groß genug dazu genommen wird. Folglich kann das, was diesem Quotienten gleich ist, nähmlich $y - n$ kleiner als jede gegebene Grösse werden; d. i. die veränderliche Ordinate y; kann von dem unveränderlichen n so wenig als man will unterschieden werden. Dieses geht vor, indem sich die Linie VN einer parallelen Lage mit CD ohne Ende nähert, wie Geom. 12. S. 12. 13. Zus. Für die vollkommen parallele Lage ist $y = n$ oder unveränderlich; also $nx : m = o$. Will man

ſich alſo in dem Falle, da VN mit CD parallel wäre, ein m; ein AO, vorſtellen, ſo muß man ſagen, daſſelbe ſey ſo groß, daß nx: m für nichts zu achten ſey, d. i. man kann für dieſen Fall m unendlich nennen, und das Endliche nx mit dem Unendlichen dividirt für nichts anſehen. In der That giebt es wiederum kein ſolches unendliches m, ſondern eigentlich kann nur m über alle Gränzen wachſen, und folglich nx: m dem o ſo nahe kommen als man nur will.

Die Parabel.

349. Erkl. Die Parabel iſt eine krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten (331) $bx = y^2$. Die beſtändige Linie b heiſſt Parameter und die Ordinate iſt alſo die mittlere Proportionallinie zwiſchen Parameter und Abſciſſe (Arithm. V. 32. 33.).

Der Parameter hat den Nahmen daher weil nach einem Rechtecke aus ihm, und der Abſciſſe das Quadrat der Ordinate gemeſſen wird (παραβολή).

Man kann ſich vorſtellen, dieſes Rechteck, liege an dem ihm gleichen Quadrate an. Von dieſem Anliegen, auch von der Vergleichung ... auf beydes kann παραβάλλω gezogen werden, ... hat die krumme Linie den Nahmen.

350. Zuſ. Zu jeder angenommenen Abſciſſe AP; 11. Fig. und dem unveränderlichen Parameter AE; findet man aus Satz. 31. die Ordinate

nate PM von der man die Lage, daß sie durch P auf die Axe AP (331) senkrecht steht, aber nicht die Länge weiß. Man darf nähmlich nur über EP einen Halbkreis beschreiben, der ein auf EP durch A gesetztes Perpendikel AG abschneidet; diesem Perpendikel macht man das Perpendikel durch P gleich, welches vermittelst einer Parallele mit der Axe geschehen kann (Geom. 12. S. 3. Zus.). So läßt sich jeder Punct der Parabel vermittelst der gemeinen Geometrie bestimmen.

351. Zus. Weil $y = \pm \sqrt{bx}$ so gehören jeder Abscisse zwo entgegengesetzte, sonst aber gleiche Ordinaten PM; Pm; zu (333). Die Verzeichnung (350) gibt solche ebenfalls, weil man den Halbkreis sowohl unter als über der Axe beschreiben kann.

352. Zus. Die Parabel wird von der Axe in zwo ähnliche und gleiche Hälften getheilt, wie der Kreis vom Durchmesser (S. 6. Grundsz.).

353. Anm. Die drey krummen Linien welche hie zuerst betrachtet werden, Parabel, Ellipse und Hyperbel, haben das mit einander gemein: Wenn man in jeder von ihnen, parallele Sehnen zieht so giebt es für jede solche Reihe Sehnen, eine gerade Linie die sie alle halbirt; Macht dieselbe mit den Linien schiefe Winkel, so heißt sie Diameter, macht sie rechte, wie bey der Parabel 11. Fig. AQ, so heißt sie Axe. Die Sehnen, nannte man also mit Rechte Ordinatim ad

diametrum applicatas, und ihre Hälften wie PM, Semiordinaten.

Blos bey den drey genannten Linien, giebt es allemahl eine gerade Linie, die alle parallele Sehnen halbirt. Offenbahr gehört dazu, daß jede dieser Sehnen, die krumme Linie nicht mehr als zweymahl schneidet. Giebt es also krumme Linien, die von jeder geraden Linie in der Reihe der Parallelen dreymahl geschnitten werden, wie 9. Fig. oder noch mehrmahl, so passt da für PM der Nahme Semiordinate nicht. Und daher habe ich sogleich (331) eine Benennung gebraucht die allemahl statt findet.

354. Zus. Weil $y = 0$ für $x = 0$; so wird die Axe von der Parabel im Anfange der Abscissen A geschnitten. Man heißt diesen Ort den Scheitel der Parabel.

355. Zus. I. Weil bx für ein positives x allemahl positiv bleibt, und mit solchem wächset; so wachsen die Ordinaten oder $\sqrt{bx}$ mit den Abscissen ohne Ende und über alle Gränzen fort, oder die Parabel geht auf jeder Seite der Axe mit einem unendlichen Schenkel fort. Dieser Schenkel geht über alle Perpendikel hinaus, die man auf die Axe ziehen, und über alle Parallelen, die man mit der Axe ziehen kann, daß sich also der Raum, den die Parabel auf der Seite des Punctes A wo ihre unendlichen Schenkel liegen, durchstreicht, auf keine Weise begränzen läßt. Die Schenkel gehen immer weiter längst

der

der Axe fort, und öffnen sich auch immer weiter auseinander.

II. Die Abscisse AP wachse um PQ = g, die Ordinate um HN = v; so ist $v = \sqrt{b.(x+g)} - \sqrt{b.x}$; Das Quadrat davon $= b.g - 2.\sqrt{bx}.\sqrt{(b.(x+g))}$. Bleibt g immer einerley, so wird dieses Quadrat immer kleiner, je gröſſer x ist.

Wenn also eine grosse Abscisse und eine kleine um gleichviel zunehmen, so wächst der grossen Abscisse ihre Ordinate um was geringers als der kleinen ihre.

Man ziehe die gerade Linie MN. Des Winkels NMH Tangente $= \frac{NH}{MH}$ ist kleiner, wenn AP gröſſer ist, MH = PQ aber ungeänderte Gröſſe behält.

III. Jeder Schenkel der Parabel, entfernt sich zwar bey wachsender Abscisse, immer mehr von der Axe, aber die Entfernung wächst immer weniger bey gleichem Wachsthume der Abscisse, je gröſſer die Abscisse ist. Des Schenkels Gang kömmt also einem Gange mit der Axe parallel, immer näher und näher, je gröſſer die Abscisse wird.

IV. Die Mechanik lehrt, daß geworfene Körper, eine Parabel beschreiben wenn man den Wiederstand der Luft beyseite setzt. Regenwasser das aus einer Dachrinne herabschiesst, stellt so dem Auge eine Parabel dar. Die Axe derselben

ben ist begreiflich vertical, und man wird leicht gewahr werden, wie bald der Gang des Stromes, wenn Wind ihn nicht störet, sich vertical zeige.

V. Zwischen den Schenkeln der Parabel, kann man der Axe parallel, nach der Richtung nach welcher die Abscissen wachsen, so weit man will fortgehen ohne jemahls in einen der Schenkel zu kommen. Der Raum also, in dem man so fortgehen kann ist unbegränzt und so ist die Parabel in der strengen Bedeutung (Geometr. 12. Erkl.) keine Figur. So wenig als der unbegränzte Streifen zwischen zwo Parallellinien.

356. Zus. Für ein verneintes x wäre bx verneint und y unmöglich (34). Es giebt also keine Ordinaten für die verneinten Abscissen, und die ganze Parabel liegt auf einer Seite des Perpendikels AG.

357. Zus. Wenn QN eine andere Ordinate, also $bQN = QN^2$ ist, so ist $QN^2 : PM^2 = AQ : AP$; und $QN : PM = \sqrt{AQ} : \sqrt{AP}$; oder die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten; und die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen; (abscissae sunt in ratione duplicata ordinatarum, et ordinatae in subduplicata abscissarum).

358. Erkl. Der Brennpunct F; heißt die Stelle der Axe, wo die Ordinate FT dem halben Parameter gleich wird.

359.

359. Zuſ. Alſo iſt b. $AF = FT^2 = \frac{1}{4}b^2$ oder $AF = \frac{1}{4}b$.

360. Zuſ. $FM = \sqrt{((x - \frac{1}{4}b)^2 + y^2)} = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}b^2)} = x + \frac{1}{4}b$.

361. Zuſ. Puncte zu finden, die in einer Parabel ſind, welche AQ zur Axe, A zum Scheitel; b zum Parameter hat, verfährt man ſo: Man trage auf beyden Seiten des Scheitels $AF = AL = \frac{1}{4}b$; ſo iſt F der Brennpunct (359); Man nehme nach Gefallen $AP = x$; und richte durch P ein unbeſtimmtes Perpendikel auf die Axe; Aus F beſchreibe man einen Kreis, deſſen Halbmeſſer $= LP = \frac{1}{4}b + x$ iſt; Er ſchneidet das Perpendikel in M; m; zween Puncten der Parabel (360). So findet man die beyden Puncte der Parabel für jede angenommene Abſciſſe.

Die Ellipſe.

362. Erkl. I. Für die Ellipſe iſt, bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = bx - \frac{b}{a}x^2$; a; die beſtändige Gröſſe b, heiſſt der Parameter; a gröſſer als b; die groſſe Axe.

II. Dem Quadrate der Ordinate; fehlt etwas zum Rechtecke zwiſchen Parameter und Abſciſſe. Dieſer Mangel (ἔλλειψις) benennt die krumme Linie.

III. Die Linie auf welcher die Abſciſſen genommen wurden, war bey der Parabel unbeſtimmt,

ſtimmt, und konnte immer länger ſeyn als der Parameter der Parabel.

Dieſes kann veranlaſſen hie das beſtimmte Stück der Abſciſſenlinie a; gröſſer als b zu nehmen.

Heiſſt aber Parameter überhaupt eine unveränderliche Seite eines Rechtecks dazu die Abſciſſe die andere Seite giebt, ſo kann Parameter auch kleiner ſeyn, als eine andere unveränderliche gerade Linie welche zugleich mit ihm die krumme Linie beſtimmt. Man ſehe unten 371. II.

363. Zuſ. Für $y = 0$ iſt x erſtlich $= 0$ zweytens $= a$; Wenn alſo die Abſciſſen von A 12. Fig. an gerechnet werden, und $AB = a$; ſo ſind die Puncte A; B; in der Ellipſe und in der Axe zugleich; Scheitel der Ellipſe (wie 354) und ihre Entfernung iſt die groſſe Axe.

364. Zuſ. Weil $y = \pm \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$ ſo gehören zu jeder Abſciſſe zwo entgegengeſetzte, ſonſt gleiche, Ordinaten, und die Ellipſe wird von der Axe in ähnliche Hälften AMDB; AmdB getheilet.

365. Zuſ. Für $x = \frac{1}{2}a = AC$ iſt $y = \frac{\sqrt{ab}}{2} = CD$; das doppelte dieſer Linie, Dd, heiſſt die kleine Axe C der Mittelpunct.

366. Zuſ. Die halbe kleine Axe ſey $= \frac{1}{2}c$; ſo iſt $c^2 = ab$ alſo $\frac{c^2}{a} = b$ oder der Parame-

ter

ter ist die dritte Proportionallinie, zu der grossen und zu der kleinen Axe.

367. Zus. Also $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$.

368. Zus. Wenn CP $= u$; also $x = \frac{1}{2}a - u$; so ist $\frac{c^2}{a} \cdot (\frac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2} \cdot (\frac{1}{2}a - u)^2$ oder $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} = y^2$ eine Gleichung für die Ellipse, die Abscissen aus dem Mittelpuncte gerechnet.

369. Zus. In dieser Gleichung, geben entgegengesetzte, sonst gleiche u; einerley y; Wenn also CQ $=$ CP genommen wird, so ist QN $=$ PM; Qu $=$ Pm; und Dd theilet die Ellipse auch in ähnliche Hälften DMAmd; DNBnd.

370. Zus. Der Quadrant DMA; deckt den Quadranten dmA (364) und den Quadranten DNB (369) welcher letztere den Quadranten dnB deckt (364), also sind alle vier Quadranten gleich und ähnlich.

371. Zus. I. Aus (368) wird $\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2} = u^2$; Nun sey CE $=$ MP $= y$; so ist EM $=$ CP $= u$; und also hat die Gleichung zwischen CE und EM; einerley Gestalt mit der zwischen CP und PM; dorten werden die Abscissen CE auf der kleinen Axe, hier die Abscissen CP auf der grossen genommen; und eine Gleichung wird

ſtimmt, und konnte immer länger ſeyn als der Parameter der Parabel.

Dieſes kann veranlaſſen hie das beſtimmte Stück der Abſciſſenlinie a; gröſſer als b zu nehmen.

Heiſſt aber Parameter überhaupt eine unveränderliche Seite eines Rechtecks dazu die Abſciſſe die andere Seite giebt, ſo kann Parameter auch kleiner ſeyn, als eine andere unveränderliche gerade Linie welche zugleich mit ihm die krumme Linie beſtimmt. Man ſehe unten 371. II.

363. Zuſ. Für $y = o$ iſt x erſtlich $= o$ zweytens $= a$; Wenn alſo die Abſciſſen von A 12. Fig. an gerechnet werden, und $AB = a$; ſo ſind die Puncte A; B; in der Ellipſe und in der Axe zugleich; Scheitel der Ellipſe (wie 354) und ihre Entfernung iſt die groſſe Axe.

364. Zuſ. Weil $y = \pm \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$ ſo gehören zu jeder Abſciſſe zwo entgegengeſetzte, ſonſt gleiche Ordinaten, und die Ellipſe wird von der Axe in ähnliche Hälften AMDB; AmdB getheilet.

365. Zuſ. Für $x = \frac{1}{2}a = AC$ iſt $y = \frac{\sqrt{ab}}{2} = CD$; das doppelte dieſer Linie, Dd, heiſſt die kleine Axe C der Mittelpunct.

366. Zuſ. Die halbe kleine Axe ſey $= \frac{1}{2}c$; ſo iſt $c^2 = ab$ alſo $\frac{c^2}{a} = b$ oder der Parame-

ter

ter ist die dritte Proportionallinie, zu der grossen und zu der kleinen Axe.

367. Zus. Also $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$.

368. Zus. Wenn CP = u; also $x = \frac{1}{2}a - u$; so ist $\frac{c^2}{a} \cdot (\frac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2} \cdot (\frac{1}{2}a - u)^2$ oder $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} = y^2$ eine Gleichung für die Ellipse, die Abscissen aus dem Mittelpuncte gerechnet.

369. Zus. In dieser Gleichung, geben ent gegengesetzte, sonst gleiche u; einerley y; Wenn also CQ = CP genommen wird, so ist QN = PM; Qu = Pm; und Dd theilet die Ellipse auch in ähnliche Hälften DMAmd; DNBnd.

370. Zus. Der Quadrant DMA; deckt den Quadranten dmA (364) und den Quadranten DNB (369) welcher letztere den Quadranten dnB deckt (364), also sind alle vier Quadranten gleich und ähnlich.

371. Zus. I. Aus (368) wird $\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2} = u^2$; Nun sey CE = MP = y; so ist EM = CP = u; und also hat die Gleichung zwischen CE und EM; einerley Gestalt mit der zwischen CP und PM; dorten werden die Abscissen CE auf der kleinen Axe, hier die Abscissen CP auf der grossen genommen; und eine Gleichung wird

aus der andern, wenn man nur Axen und Coordinaten verwechselt. Man muß also annehmen, daß in der Gleichung 368. a die grosse Axe, c; die kleine bedeuten soll, wenn beyde nicht gleich sind.

II. Man nenne $DE = \frac{1}{2}c - y = w$, also $y = \frac{1}{2}c - w$; So wird aus der Gleichung in (I) $\frac{a^2}{c} \cdot w - \frac{a^2}{c^2} \cdot w^2 = u^2$. Setzt man $\frac{a^2}{c} = k$ so kömmt $k \cdot w - \frac{k}{c} \cdot w^2 = u^2$.

In dieser Gleichung, sind die Abscissen w; vom Scheitel D auf der kleinen Axe genommen, u die zugehörigen Ordinaten; Was also für Abscissen auf der grossen Axe vom Scheitel A genommen, b war (362) das ist hie k, Parameter für die kleine Axe (362).

III. In $u = a\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)}$ setze man $a = m.c$ so ist $u = m.c\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)} = m.\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)}$; Setzt man also $c = 2$ so ist $u = m.\sqrt{(1 - y^2)}$; wo u, Ordinaten mit der grossen Axe parallel, und y Abscissen auf der kleinen Axe bedeuten können.

372. Zus. Die Gleichung $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - u^2$ gehört einem Kreise, dessen Durchmesser $= c$. Ist also m ein uneigentlicher Bruch nicht viel

gröſſer als 1; ſo iſt die Ellipſe nicht ſehr von einem Kreiſe unterſchieden, ihre groſſe Axe nicht viel gröſſer als die kleine.

Daher braucht Maupertuis Fig. de la terre Liv. 1. Sec. Part. ch. 9. die Gleichung (371. III.) für den Erdmeridian als eine Ellipſe betrachtet welche dem Kreiſe nahe kömmt.

Selbſt weil in (368. 371) nur Axen und Coordinaten verwechſelt ſind, kann c die groſſe Axe bedeuten a die kleine, wenn m gröſſer als 1 iſt.

373. Zuſ. Jede Ordinate y iſt kleiner als CD und je weiter eine Ordinate vom Mittelpuncte iſt, deſto kleiner iſt ſie (368).

374. Zuſ. Wenn PM; QN; zwo unbeſtimmte Ordinaten ſind, ſo iſt $PM^2 = b.\left(AP - \frac{AP^2}{a}\right)$; $QN^2 = b.\left(AQ - \frac{AQ^2}{a}\right)$ (362). Alſo $PM^2 : QN^2 = AP.(a - AP) : AQ.(a - AQ) = AP.PB : AQ.QB$; die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich wie die Rechtecke unter den Segmenten der Axe.

375. Zuſ. y^2 iſt $= o$ für $u = \pm\frac{1}{2}a$ (368) und verneint, für $u > \frac{1}{2}a$; folglich gibt es keine Ordinaten für gröſſere Abſciſſen als $\frac{1}{2}a$; auf beyden Seiten des Mittelpuncts; daß alſo die ganze Ellipſe in der Figur AMDBdmA enthalten iſt.

376.

376. Aufg. Den Brennpunct F (358) zu finden.

Auſl. Aus 368. iſt $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 CF^2}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ (366) alſo $CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ und $CF = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2)} = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ welches zweene Brennpuncte F; f; in gleichen Entfernungen auf entgegengeſetzten Seiten des Mittelpuncts anzeigt, wie nach 369. ſeyn muß. Ich will $CF = Cf = e$ nennen.

377. Zuſ. Weil $CD = \frac{1}{2}c$; ſo iſt $FD = fD = \frac{1}{2}a$.

Wenn $fP = w = u + \frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$ ſo kömmt aus 368. $y^2 = \frac{c^4}{4a^2} + \frac{c^2\sqrt{(a^2-c^2)}}{a^2} w - \frac{c^2 w^2}{a^2}$ die Abſciſſen von dem Brennpuncte f gerechnet (376). Rechnet man die Abſciſſe von F, oder iſt $FP = u$, ſo kömmt vor die Wurzelgröſſe.

378. Aufg. Die Summe der Linien FM; fM; aus beyden Brennpuncten nach einem Puncte der Ellipſe zu finden.

Auſl.

Aufl. $FM^2 = (e-u)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (376. 368)

$= \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$; Dieses ist das Quadrat von $\pm\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$;

Nun sucht man ohne Zweifel für FM einen positiven Werth. Also muß man die Zeichen gebrauchen, bey denen die Wurzel des Quadrates positiv ist, was man auch statt u setzt, denn u soll jede Abscisse bedeuten können. Nun ist der grösste Werth, den u haben kann; $\frac{1}{2}a$ (375) dieses gibt die obern Zeichen gebraucht; die Wurzel $= \frac{1}{2}.(a - \sqrt{(a^2-c^2)})$ also positiv; und folglich geben bey dem Gebrauche der obern Zeichen alle kleinere u diese Wurzel positiv; Gegentheils gibt jedes u das nicht grösser als $\frac{1}{2}a$ ist, bey dem Gebrauche der untern Zeichen, die Wurzel negativ. Folglich ist $FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$

Ferner $fM^2 = (e+u)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2.u^2}{a^2} = \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$ also $fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$ folglich $FM + fm = a$;

oder

oder die Summe dieser Linien, ist der grossen Axe gleich.

379. Zus. Mit einem willkührlichen Stücke z; der grossen Axe dessen Grösse zwischen $\frac{1}{2}a + e$ und $\frac{1}{2}a - e$ fällt, beschreibe man aus F einen Kreis; und einen andern aus f mit $a - z$; so geben beyder Durchschnitte zweene Puncte der Ellipse, und so kann man alle ihre Puncte finden.

380. Zus. Wenn ein Faden, dessen Länge $= a$; mit beyden Enden in F und f befestiget, und alsdenn mit einem Stifte in die Lagen FMf ausgedehnet wird, so beschreibt der Stift die Ellipse (Astr. 236.).

381. Zus. Je näher F; f; zusammen, oder an C rücken, desto geringer ist e (376) und $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ (378) $= \frac{4ue}{a}$ desto näher kömmt also die Ellipse einem Kreise, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(FM + fM)$ und der Mittelpunct C; für $e = o$ wird sie völlig in diesen Kreis verwandelt. Siehe Astr. 235. 238.

382. Zus. Die Weite des Brennpunctes vom Scheitel A, ist $\frac{a \mp \sqrt{(a^2 - ab)}}{2}$ (378; 366) das obere Zeichen für AF das untere für Af.

Man

Man nenne AF = h, also $a - \sqrt{(a^2 - ab)} = 2.h$, so kömmt $b = 4.h - \frac{4.h^2}{a}$. Daher

$$y^2 = 4h.\left(1 - \frac{h}{a}\right).x.\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Vergleichung der Ellipse mit der Parabel.

383. I. Durch einen Scheitel A 13. Fig. gehen, eine Parabel AIN, und eine Ellipse AKM. Beyde haben einen Parameter = b und der Ellipse grosse Axe ist = a. Man sucht den Abstand der Puncte I, K, die in beyden krummen Linien, einer Abscisse AO = x gehören.

$$OI - OK = \sqrt{bx} - \sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}$$

$$= \sqrt{bx}.\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\right).$$

II. Indem x bis an a wächst, weiter kann es in der Ellipse nicht wachsen, nimmt $1 - \frac{x}{a}$ beständig ab, also wächst was in OI multiplicirt ist, und da OI selbst wächst, so wächst auch das Product = IK.

Wenn aber x sehr klein gegen a ist, so wird OI in etwas sehr kleines multiplicirt.

III. Ist also die Axe der Ellipse sehr groß so sind am Anfange unweit des gemeinschaftlichen Schei-

Scheitels die Bogen der Ellipse und der Parabel, nicht sehr unterschieden.

IV. Beyde krumme Linien können nicht einerley Brennpunct haben. Der Parabel ihrer steht von A um $\frac{1}{4}b$ ab, der Ellipse ihrer hat den Abstand (382).

V. Man kann fragen, wie dieser Abstand sich ändert, wenn b bleibt, und a immer wächst? Allgemein ist er $= \frac{1}{2}a.\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{b}{a}\right)}\right)$.

VI. Das zweyte Glied der Grösse unter dem Wurzelzeichen, ist ein eigentlicher Bruch, dessen Zähler ungeändert bleibt, der Nenner immer wächst.

VII. Diesem gemäß, drucke man die Wurzelgrösse durch eine Reihe aus, die sich nähert. Dazu dient (625) welches hie gebraucht werden kann, da es von Gegenwärtigem gar nicht abhängt; Es ist dorten x; hie $-\frac{b}{a}$; also die Wurzelgrösse $= 1-\frac{1}{2}.\frac{b}{a}-\frac{1}{8}.\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{16}\right).\left(\frac{b}{a}\right)^3\ldots\ldots$

VIII. Die ziehe man von 1 ab, und multiplicire den Rest mit $\frac{1}{4}a$; so kömmt der Abstand $(V) = \frac{1}{4}b+\frac{1}{16}.\frac{b^2}{a}+\frac{1}{32}.\frac{b^3}{a^2}\ldots\ldots$

IX.

IX. Er übertrifft also allemahl den Abstand des Brennpuncts der Parabel, aber um etwas geringes wenn a gegen b sehr groß ist.

X. Dieses Geringe, wird immer noch geringer wenn a immer grösser wird, oder: Wenn die Axe der Ellipse immer grösser wird, so nähert sich derselben Brennpunct immer mehr und mehr dem Brennpuncte der Parabel, und kann solchem so nahe kommen als man will, wenn die Axe so lang werden kann als man will.

XI. Wenn man a gegen b sehr groß setzt, ist der Bruch (VI) sehr klein. Man könnte also denken es liesse sich ohne grossen Fehler weglassen. Aber da käme die Wurzelgröße $= 1$, und der Abstand (V) würde $\frac{1}{2}a.(1-1)$.

XII. Nähmlich: die Wurzelgröße besteht aus zwey Stücken; 1 und einer Reihe die gegen 1 sehr wenig betragen mag. Wenn man also die Wurzelgröße von 1 abzieht, so hebt sich $1-1$ auf, der Rest aber ist die Reihe, so wenig auch dieselbe beträgt. Mit diesem Reste wird $\frac{1}{2}a$ multiplicirt, den Abstand (V) zu geben. Dieses Product kann doch eine beträchtliche Gröse haben, wenn der eine Factor groß ist; So giebt es $\frac{1}{4}b$ und noch etwas darüber, welches nur alsdann verschwindet, wenn man a unendlich groß gegen b setzt.

384. I. Eine Parabel hat mit der Ellipse 12. Fig. Brennpunct und Scheitel gemein. Man

ſucht den Unterſchied ihrer Ordinaten, die einer Abſciſſe, AP = x gehören.

Der Parabel-Parameter iſt = 4. AF (359) = 4. h (382).

Iſt alſo die Axe der Ellipſe ſehr groß gegen AF, ſo iſt der Parabel Parameter nicht viel kleiner als der Ellipſe ihrer, und beyde kommen einander immer näher je gröſſer a gegen h wird.

Schon hieraus wird man urtheilen daß Bogen der Parabel und der Ellipſe unweit des gemeinſchaftlichen Scheitels, nicht weit von einander abgehen.

Für die Abſciſſe x, heiſſe die Ordinate der Parabel = z, ihr Quadrat iſt = 4. hx, um $\frac{4h^2.x}{a} + \frac{4.h.x^2}{a}.\left(1-\frac{h}{a}\right)$ gröſſer als das von y. Wiederum um etwas geringes, wenn die Abſciſſe ein kleiner Theil der Axe iſt.

Der Ordinaten Unterſchied ſelbſt, $z-y = 2.\sqrt{(hx)}.\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{h}{a}\right)}.\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right)$

Iſt nun a ſehr groß gegen h und x; ſo iſt, was in die Ordinate der Parabel multiplicirt wird, ſehr klein, alſo beyder Ordinaten Unterſchied, ein ſehr kleiner Theil der gröſſten, und die Puncte der Ellipſe und der Parabel, ſind nahe beyſammen, in Vergleichung mit jedes Entfernung von der Axe.

Ich

Ich erinnere mit Fleiß an diese Vergleichung, weil es bey dem Unterschiede, nicht auf seine Grösse für sich betrachtet ankömmt, sondern auf seine Verhältniß zu jeder der unterschiedenen Grössen. Wenn die Ordinaten 999 und 1000 Meilen sind, so ist ihr Unterschied weniger beträchtlich, als wenn sie nur 7 und 8 Fuß sind. Dort beträgt er 0,001 der gröſſten, und hie $\frac{1}{8}$.

Wenn also für gegebene h und x, a immer wächst, so nähert sich der Bogen der Ellipse immer mehr und mehr dem Bogen der Parabel, je gröſſer die Axe der Ellipse wird, und bey einer sehr langen Ellipse sind die Bogen nah am Scheitel von der Parabel ihren wenig unterschieden.

II. Wenn man annimmt ein Komet gehe in einer sehr langen Ellipse um die Sonne, so wird der Theil seines Weges in dem wir ihn sehen nicht sehr von einer Parabel unterschieden seyn, deren Brennpunct in die Sonne fällt und der Scheitel in des Kometen Perihelium. Denn wir sehen ihn nur in dem Theile seines Weges, der den angezeigten Stellen nah ist. Darauf gründet sich die paraboliſche Theorie der Kometen. Astron. 306.

Von der Aehnlichkeit der Ellipsen.

385. **Erkl.** Wenn einer Ellipse grosse und kleine Axe und Parameter α; γ; β; sind, so heißt sie der Ellipse 368. **ähnlich** (specie eadem)

dem) wofern $a : c = \alpha : \gamma$; oder $a : \alpha = c : \gamma$ daher denn $b : \beta = \frac{c^2}{a} : \frac{\gamma^2}{\alpha} = \frac{c^2}{a} : \frac{\alpha^2 c^2}{a^2 \alpha}$ oder auch $b : a = \beta : \alpha$.

386. Zuſ. Die Abſciſſe dieſer Ellipſe heiſſe t ihre Ordinate z; alſo ſey $z^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{\gamma^2 t^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{4 a^2} - \frac{c^2}{a^2} t^2$. Nun ſey auch $a : \alpha = u : t$ alſo $z^2 = \frac{\alpha^2 c^2}{4 a^2} - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha^2 u^2}{a^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}\right) = \frac{\alpha^2 c^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{c^2}$ alſo $z = \frac{\alpha y}{a}$ oder wenn die Abſciſſen ſich wie die Axen verhalten, verhalten ſich die Ordinaten eben ſo.

387. Zuſ. Aehnliche Ellipſen ſind nur der Gröſſe nach unterſchieden, alle beſtändigen Linien in ihnen ſind einander proportionirt, und für Abſciſſen, die ſich wie ein paar zuſammengehörige Linien in beyden Ellipſen, z. E. wie die groſſen Axen, oder wie die Parameter verhalten, ſind die Ordinaten auch proportionirt.

388. I. Aehnliche geradelinichte Figuren, werden aus ähnlichliegenden Puncten in ähnliche Dreyecke getheilt (Geom. 39. S.). Man ziehe alſo aus dieſen ähnlichliegenden Puncten, nach

ein

ein paar bestimmten ähnlichliegenden Winkelpuncten gerade Linien, wie in der Geometrie 92. Fig. FA, fa, wären; Auf die Linie in der einen Figur, lasse man von allen Winkelpuncten Perpendikel fallen, und auch so auf die in der andern Figur. Jedes Paar ähnlichliegender Winkelpuncte giebt so ein paar ähnlicher rechtwinklichter Dreyecke, wo sich die Perpendikel verhalten wie die Hypotenusen FB, fb u. s. w. und die Grundlinien eben so. Die Grundlinien für die eine Figur lägen alle auf der graden Linie FA, und die für die andere alle auf der graden Linie fa, gingen alle von F, f, aus, der Gestalt der Figuren und der Lage der Winkelpuncte gemäß, nach einer Seite, oder nach entgegengesetzten. Sie wären also Abscissen, wie die Perpendikel Ordinaten.

II. Nehmen die Seiten der Figuren immer mehr und mehr ab, und nähert sich jeder ihrer Winkel immer mehr und mehr zween rechten, so nähern sich die geradelinichten Figuren immer mehr und mehr krummen Linien.

III. Begreiflich liesse sich eben so was bey ein paar ähnlichen Zusammenfügungen gerader Linien denken, wenn sich auch keine so zusammenschlösse, daß sie einen Raum ringsherum begränzte, also in der strengen Bedeutung (Geom. 12. Erkl.) keine Figur wäre. Dieses erinnere ich deßwegen, damit man sieht es gelte auch von krummen Linien wie die Parabel (355; V.).

IV. Hat man also eine Gleichung zwischen x; y; für eine krumme Linie, so bekömmt man eine die ihr ähnlich ist, wenn man eine Abscissenlinie, und einen Anfang der Abscissen nach Gefallen annimmt, nun Abscissen X = m. x; Ordinaten Y = m. y wo m eine unveränderliche Zahl ist. Ein anderes m, bringt eine andere krumme Linie auch der anfangs gegebenen ähnlich.

V. Findet sich in der Gleichung zwischen x und y, eine einzige unveränderliche Grösse = a; so mache man zwischen X und Y eine Gleichung, welche eben die Potenzen dieser beyden Coordinaten, auf eben die Art zusammengefügt enthält, wie die vorige Gleichung zwischen ihren Coordinaten, und in der auch eine einzige unveränderliche A, ist.

In der ersten Gleichung gehört jedem x, ein y oder mehrere; die durch a, und x bestimmt werden. In der zweyten, jedem X ein Y oder mehrere die durch X und A auf eben die Art bestimmt werden, so daß sich Y in y verwandelt, wenn sich X in x und zugleich A in a verwandelt.

Was jedes y für eine Verhältniß zu a hat, das wird durch die Verhältniß bestimmt die x zu a hat.

Und eben so, was jedes Y für eine Verhältniß zu A hat, durch die Verhältniß die X zu A hat. Versteht sich daß wenn einer Abscisse mehr Ordinaten gehören, Y für X in eben der Reihe genommen wird, in der sich y für x befindet (327).

VI.

VI. Nimmt man nun

$$a : x = A : X$$

so ist $y : a = Y : A$ daher

$$y : x = Y : X$$

So gehören in (V) beyde Gleichungen ähnlichen krummen Linien.

VII. Diesem gemäß sind alle Parabeln einander ähnlich. Zu der oft gebrauchten Gleichung nehme man $Y^2 = B.X.$ Ferner $X : x = B : b$ so ist $Y^2 = \frac{B.B.x}{b} = \frac{B.B.y^2}{b.b}$ also $Y : y = B : b.$

389. I. Wenn man für eine krumme Linie eine Gleichung zwischen x und y hat, so nenne man einer andern, Abscisse $= p$, Ordinate $= q$; und nehme $p = m.x$; $q = n.y.$ Diese beyden krummen Linien heissen affines.

II. Der ersten Gleichung sey die gewöhnliche für die Ellipse. So wird der andern ihre

$$\frac{q^2}{n^2} = \frac{b.p}{m} - \frac{b}{a}.\frac{p^2}{m^2} \quad \text{oder}$$

$$q^2 = \frac{n^2.b}{m}.p - \frac{b}{a}.\frac{n^2}{m^2}.p^2.$$

Die andere ist also auch eine Ellipse, die Abscissen wie bey der ersten vom Scheitel gerechnet, der Parameter $= \frac{n^2.b}{m}$ und weil allemahl der Coefficient beym Quadrate der Ordinate, ein

Quotient des Parameters mit der grossen Axe dividirt ist, so findet man die grosse Axe wenn man den Parameter mit dem Coefficienten dividirt. Sie ist also hie $= \frac{n^2 . b}{m} . \frac{m^2 . a}{n^2 . b} = m . a.$

III. Euler Introduct. in Analys. infiniti L. II. c. 18. handelt de curvis similibus et affinibus; Die letzte Benennung ist, wie es mir scheint von ihm. Deutsch sie zu geben wage ich nicht. Schwägerschaft krummer Linien möchte nicht-ernstlich aussehen, Verwandschaft wäre zu allgemein da man wie weiter unten erwähnt wird (467), von Geschlechtern und Familien krummer Linien redet. Ueberhaupt sehe ich von der Affinität der krummen Linien keinen grossen Gebrauch; Sie hört selbst durch Aenderung der Abscissenlinie, oder des Anfangs der Abscissen auf. Euler der dieses erinnert, hätte hinzusetzen können: wie die Schwägerschaft durch Aenderungen in den Ehen.

IV. Wenn man aus der Gleichung (II) eine machte, wo die Abscissen aus dem Mittelpuncte gerechnet werden, so bleibt die Affinität. Denn eine solche Abscisse heisse $w = \frac{1}{2} . m . a - p = m . (\frac{1}{2} a - u)$ (366) und da die Ordinate $q = m . y$ bleibt, so ist auch nun zwischen q, w; und y, u; eben das Verhalten wie vorhin zwischen q, p; und y, x. Aber zwischen der Gleichung (II) und der für die erste Ellipse (368) zeigt sich keine Affinität.

V. Aehn-

V. **Aehnlichkeit** zwischen krummen Linien, bleibt, wie auch bey ihnen Abscissenlinien und Anfang der Abscissen geändert werden. Indessen, da man mehrere Gleichungen haben kann, deren Ableitung erst versichert daß sie einer und derselben krummen Linie gehören, wie: Abscissen vom Scheitel und aus dem Mittelpuncte gerechnet, so ist klar daß z. E. bey einer Gleichung der ersten Art für eine Ellipse, und der andern für eine ähnliche Ellipse die Aehnlichkeit doch aus den Gleichungen nicht in die Augen fallen würde. Ohngefähr, wie ähnliche geradelinichte Figuren nicht in ähnliche Dreyecke getheilt werden, als aus ähnlich liegenden Puncten.

VI. Wenn ähnliche Dinge, auf ähnliche Art verbunden werden, so entstehen ähnliche Dinge. Diese Anwendung des metaphysischen Begriffs der Aehnlichkeit ist von Wolfen in der Geometrie empfohlen worden El. Geom. §. 119. Sie wird auch in der That häufig gebraucht, nur muß man jedesmahl das Aehnliche in den Sachen die zur Bestimmung gebraucht werden, und in der Art des Gebrauches deutlich entwickeln.

Die Hyperbel.

389. **Erkl.** Die Hyperbel ist eine krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten; $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Die Linie b; und die grössere a; heissen wiederum **Parameter** und **Axe**.

Den Nahmen giebt, der Ueberschuß (ὑπερβολή) des Quadrats der Ordinate über Rechteck aus Parameter und Abscisse.

390. Zus. Wenn man in der Gleichung für die Ellipse (362); $-a$ statt $+a$ setzt, so wird aus ihr die Gleichung für die Hyperbel.

391. Zus. In diesem Verstande kann man die Hyperbel als eine Ellipse, deren Axe verneint wäre, ansehen.

392. Zus. Für $y = o$ ist $x = o$ oder $= -a$; Wenn also A 14. Fig. der Anfang der Abscissen, und zugleich ein Scheitel der Hyperbel (363) und AP eine positive Abscisse ist, so fällt der Hyperbel anderer Scheitel B; auf die entgegengesetzte Seite, und es ist $AB = a$ und als verneint anzusehen, wenn es mit den bejahten Abscissen verglichen wird.

393. Zus. Jeder Abscisse gehören zwo entgegengesetzte, sonst gleiche Ordinaten zu. Also theilt die Axe die Hyperbel in ähnliche Hälften.

394. Zus. Für jedes bejahte x das gröſſer als $= o$ ist, gibt es mögliche Ordinaten; die immer wachsen, wenn x wächset. Also geht die Hyperbel mit zween unendlichen Schenkeln, die immer weiter aus einander gehen, längst der Axe fort, wie die Parabel (355).

395. Zus. Weil $y^2 = bx.\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{bx}{a}.(a+x)$ so ist für jedes verneinte x das zwischen o und

$\mathfrak{B}$ und $-a$ fällt, das Quadrat der Ordinate verneint; denn der Factor $\frac{bx}{a}$ ist für jedes verneinte x verneint, aber der $a+x$ ist für ein x von den angegebenen bejaht. Folglich sind für diese Abscissen die Ordinaten unmöglich, oder es gibt keine Puncte der Hyperbel, deren Ordinaten zwischen A und B durchgingen.

396. Zus. Aber sobald ein verneintes x gröſſer als a wird, sobald wird $a+x$ auch verneint, folglich $\frac{bx}{a}$. $(a+x)$ als ein Product aus zwo verneinten Gröſſen bejaht, und die Ordinate wieder möglich. Es gibt also für solche verneinte Abscissen mögliche Ordinaten, oder ihnen gehören Puncte der Hyperbel zu.

397. Zus. Diese Ordinaten wachsen beständig, wenn die verneinten x wachsen. Denn in diesem Falle wird $a+x$ immer ein gröſſer Verneintes, und $\frac{bx}{a}$ ebenfalls, also das Product ein gröſſer Bejahtes.

398. Zus. Die Hyperbel geht von B aus auch mit zween Schenkeln; BR; Br; die sich immer weiter ausbreiten unendlich fort wie (394).

399. Zus. Wenn man $\sqrt{ab} = c$; die kleine Axe der Hyperbel, wie (366) nennt, so ist $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$.

400. Erkl. Wenn $AC = \frac{1}{2} AB$ so ist C der Mittelpunct der Hyperbel.

401. Zus. Es gibt hier keine Ordinate durch den Mittelpunct (395) wie bey der Ellipse (365). Die Hyperbel ist nähmlich eine Ellipse, deren kleine Axe $\sqrt{-}$ ab unmöglich wäre (391).

402. Aufg. Wenn die Abscissen $CP = u$ aus dem Mittelpuncte gerechnet werden, eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Aufl. Weil $x = u - \frac{1}{2}a$; so ist aus (399)
$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

403. Anm. Die Gleichung wird aus (368) wenn man $c\sqrt{-1}$ statt des dortigen c schreibt (401).

404. Zus. Das Perpendikel Dd theilt die Hyperbel in ähnliche Hälften; wie (369). Man heißt sie entgegengesetzte Hyperbeln, ob sie wohl eigentlich zusammen nur eine ausmachen. Auch liegen innerhalb der rechten Winkel DCA; ACd; dCB; BCD; vermöge (393; 404) gleiche und ähnliche Theile der Hyperbel wie 370.

405. Zus. Für den Brennpunct F (376) ist der Ordinate Quadrat $= \frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ (399)
$= \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$ (402) also wenn u hier die Abscisse für den Brennpunct bedeutet; $u = \frac{+}{\sqrt{(a^2}}$

$\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$ für die beyden Längen CF; Cf;

Auch ist $AF = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)} - a}{2}$.

406. Zus. $FM^2 = \left(u - \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}\right)^2 + yy = u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{a^2+c^2}{4} + \frac{u^2c^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2+c^2}{a^2}u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{1}{4}a^2$ also $FM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \frac{1}{2}a$ wenn es positiv seyn soll, wie (378). Es ist hier allemahl $u > \frac{1}{2}a$ (395). Eben so ist $fM^2 = \left(u + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}\right)^2 + y^2$ und $fM = \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$; Folglich $fM - FM = a$; oder der Unterschied dieser beyden Linien, der grossen Axe gleich, wie bey der Ellipse die Summe (378).

407. Anm. Man kann hieraus eine Art, die Hyperbel zu verzeichnen, herleiten, wie bey der Ellipse (379). Auch gründen sich auf diese Eigenschaften der Brennpuncte (360. 378. 405) Werkzeuge, diese drey krummen Linien mit einer stetigen Bewegung zu beschreiben. Francisc. à Schooten, de organica conicarum sectionum in

plano

plano descriptione, ist das vierte Buch von Exercitat. mathemat. Libri V. Leid. 1657.

408. Zus. Für die gerade Linie CL sey LP $= z$; und $z = \frac{cu}{a}$; also $AE = \frac{1}{2}c$ (400) so ist (402) $z^2 - y^2$ oder $(z+y).(z-y) = \frac{1}{4}c^2$ also $z-y$ oder $LM = \frac{cc}{4.(z+y)}$ welches, wenn u wächset, beständig abnimmt, und kleiner als jede gegebene Grösse wird, aber nie nichts werden kann, so lange u und folglich z; y; Grössen sind die sich angeben lassen. Also wird LM, die Weite des Schenkels AM der Hyperbel von der geraden Linie, immer kleiner und kleiner, und geringer als jede gegebene Grösse, aber sie bleibt allemahl noch etwas. Die Hyperbel nähert sich dieser geraden Linie immer mehr und mehr, aber sie erreicht solche nie. Diese gerade Linie heisst die Asymptote.

409. Zus. Ihr Theil CL gehört für den Schenkel AM; Ihr Theil CO für den Schenkel BS; Eben so gibt es eine andere Asymptote N1; deren Gleichung $TN = -\frac{cu}{a}$ ist; ihre Theile CN; C1; gehören für die Schenkel BR; Am.

Den Asymptotenwinkel LC1, halbirt die Axe CA, seiner Hälfte Tangente ist $\frac{c}{a}$ kleiner als 1; (399) der ganze ist also spitzig. Hat aber

aber wie natürlich einen ſtumpfen Nebenwinkel LCN, zwiſchen der einen Aſymptote, und der andern Verlängerung.

410. Zuſ. Weil $Ml = y + z$; ſo iſt $LM. Ml = \frac{1}{4}c^2$ (408) unveränderlich.

411. Zuſ. MQ ſey der Aſymptote Cl parallel. Man ſuche MQ und CQ, auch CQ. MQ.

Das Dreyeck QLM, iſt dem gegebenen Dreyecke CEe (408) ähnlich, beyde ſind gleichſchenklich, $QL = QM$; $CE = Ce$.

Wegen der Parallelen QM, Cl, iſt $LM : LQ = Ml : CQ$; oder $Ee : CE = z + y : CQ$; das giebt $CQ = \frac{CE}{Ee} \cdot (z+y)$. Auch $Ee : Ce = LM : MQ$; daher $MQ = \frac{Ce}{Ee}(z-y)$.

Folglich $CQ \cdot MQ = \frac{CE^2}{Ee^2} \cdot (z+y) \cdot (z-y)$

alſo (408) $CQ \cdot QM = \frac{a^2+c^2}{16}$.

412. Zuſ. Man kann CQ; QM; als Coordinaten auf der Aſymptote anſehen. Wenn jenes $= p$ dieſes $= q$; ſo iſt $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten.

413. Zuſ. Wenn AI auch mit CI parallel geht, ſo iſt $CAI = ACe = ACE$; alſo $CI = AI$; und

und $CL.AI = CI^2$. Daher $CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ (412). Dieſes Quadrat nennt man die Potenz der Hyperbel.

414. Aufg. Wenn eine nach Gefallen gezogene gerade Linie, 15. F. die Aſymptoten in R; ϱ; die Hyperbel in M; μ; ſchneidet; die Verhältniß MR; $\mu\varrho$; zu finden.

Aufl. Man ziehe MD; $\mu\delta$ mit den Aſymptoten $C\varrho$; CR; parallel, ſo iſt

$MR : MD = R\varrho : C\varrho$

$R\varrho : \mu R = C\varrho : C\delta$; alſo

$$MR = \frac{MD.\ \mu R}{C\delta}$$

und eben ſo, wie man auch nur durch gehörige Verwechſelung der griechiſchen und lateiniſchen Buchſtaben gleich überſieht; $\mu\varrho = \frac{\mu\delta.\ M\varrho}{CD}$; alſo $MR : \mu\varrho = CD.\ MD.\ \mu R : C\delta.\ \mu\delta.\ M\varrho = \mu R : M\varrho$ (411) $= M\mu + MR : M\mu + \mu\varrho$ folglich $= M\mu : M\mu$ (Arithm. V. C. 34. II.) daher auch $\mu R = M\varrho$.

Zuſatz. Wenn die Lage der Aſymptoten, mit einem Puncte M gegeben iſt, ſo findet man alle übrigen Puncte, wenn man alle Linien MRϱ zieht, und allemahl $\varrho\mu = RM$ macht. Dieſes findet auch ſtatt, wenn die Puncte M; μ; in entgegengeſetzte Hyperbeln (404) fallen, wie man

man sich leicht durch Entwerfung einer Figur dafür überzeugen kann.

415. Zus. I. Aus den gegebenen Dingen (414) sind die Axen so gegeben. Man ziehe MD mit Cϱ parallel und halbire den Winkel RCϱ durch CP; Man nehme $CI = \sqrt{CD.MD}$, so ist solches $= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{4}$ (412) zieht man nun IA mit Cϱ parallel, so ist CA die halbe grosse Axe, und AE senkrecht auf sie gesetzt die halbe kleine (413).

II. Der Asymptotenwinkel nähmlich allein, gibt nicht die Axen selbst, nur ihre Verhältniß. Er sey $RC\varrho = 2k$ und $RCP = k$; Man nehme $CA = \frac{a}{2}$ nach Gefallen, so ist die halbe kleine Axe $AE = \frac{1}{2}a.\ \text{tang}\,k$. Nähme man auf CP eine andere Länge $= \frac{1}{2}\alpha$; für die halbe grosse Axe, so gehörte dazu eine andere halbe kleine $= \frac{1}{2}\ddot{\alpha}.\ \text{tang}\,k$.

III. Für die Axe a; ist also die Gleichung der Hyperbel (402) $y^2 = u^2.\ \text{tang}\,k^2 - \frac{a^2\ \text{tang}\,k^2}{4} = (u^2 - \frac{1}{4}a^2).\ \text{tang}\,k^2$.

IV. Wäre daher in II. $\alpha > a$; so gehörte in der Hyperbel deren Axe α ist, zu eben der Abscisse u (III) eine kleinere Ordinate. Oder, wenn zwischen einerley Asymptoten, zwo Hyperbeln beschrieben werden, so fällt die deren grosse

Axe am grössten ist, oder die ihren Scheitel am weitesten vom Mittelpuncte hat, ganz innerhalb der andern.

V. Alle diese Hyperbeln, nähmlich zwischen einerley Asymptoten, sind einander ähnlich, wie die Ellipsen (385) und der Asymptotenwinkel bestimmt nur die Verhältniß a : c, also eine Reihe ähnlicher Hyperbeln.

VI. Ist aber noch ein Punct M gegeben so sind MD; CD; gegeben, und wenn man a. tang k statt c setzt (II) so ist aus (I) CD. MD $= \frac{1 + \text{tang}\,k^2}{16} \cdot a^2$ daher $a = \frac{4\sqrt{(CD.MD)}}{\text{sec}\,k}$ $= 4.\sqrt{(CD.MD)}.\cos k$ (Trigon. 4. Erkl. 5. Zus.) und $c = 4.\sqrt{(CD.MD)}.\cos k.\text{tang}\,k = 4.\sqrt{(CD.MD)}.\sin k$ (Trigon. 4. Erkl. 3. Zus.).

VII. Hieraus lassen sich die Axen, aus den gegebenen Dingen bequem berechnen.

VIII. Exemp. Der Asymptotenwinkel sey 30° also k = 15; Der Punct M liege so daß von einem gewissen Maasse CD = 25; DM = 4; also CD. DM = 100 und die Wurzel daraus = 10: so ist

$a = 4.\cos 15°.10 = 4.0{,}96592.10 = 38{,}6368$

und

$c = 4.\sin 15°.10 = 4.0{,}25882.10 = 10{,}3529.$

Mit den Logarithmen rechnete man so, daß man jedes Sinus Logarithmen aus den Tafeln, um 10 verminderte

log

log 40 = 1,6020600
log cos k = 9,9849438 − 10
log a = 1,5870038 giebt a = 38,637

Auch log 40 = 1,6020600
log sin k = 9,4129962 − 10
log c = 1,0150062; c = 10,358

Der Parameter $b = \frac{c^2}{a}$ (399) findet sich auch so:

2 log c = 2,0303124
log a = 1,5870038
log b = 0,4433086; giebt b = 2,7752

IX. Wären CD, DM grosse Zahlen, oder auch ihr Product keine Quadratzahl, so fände man die Sache noch bequemer so:

log √(CD. DM) = ½. (log CD + log DM)
alsdenn
log a = log 4 + ½ (log CD + log DM)
+ log tab cos k − 10
log c = log 4 + ½ (log CD + log DM)
+ log tab sin k − 10
log b = 2 log c − log a.

X. Aus a und c; giebt sich umgekehrt der Asymptotenwinkel so: $\text{tang } k = \frac{c}{a}$ (11) also

(Trig. 19. S. 6. Zus.)

$\text{tang } 2k = \frac{2c:a}{1 - cc:aa} = \frac{2ac}{aa - cc} =$

$\frac{2ac}{(a+c).(a-c)}$ folglich $\log \text{tang } 2k =$ $\log 2 + \log a + \log c - (\log (a+c) + \log (a-c))$ für den Halbmesser $= 1$; zu diesen Logarithmen wird also nach Trig. 20. S. Ex. noch 10 addirt um den Logarithmen dieser Tangente wie er in den Tafeln steht zu finden.

Man könnte auch sagen: log tabular tang $k = 10 + \log c - \log a$ und alsdenn k verdoppeln. Aber weil man bey dem gewöhnlichen Gebrauche der Tafeln k nur zwischen Gränzen die um 1 Min. unterschieden sind, findet, so finde man solchergestalt 2k innerhalb zwo Minuten. Dieses zeigt wie brauchbar die analytischen trigonometrischen Formeln sind, die Ausübung bequem und richtig zu machen.

416. I. Auf der geraden linie CD, welche die Lage der kleinen Axe angiebt, nehme man von C aus eine Abscisse $= U$, und setze, der ihr zugehörigen Ordinate Quadrat $Y^2 = \frac{a^2}{c^2} \cdot U^2 - \frac{1}{4}a^2$.

II. Für $Y = 0$ ist $U = \frac{1}{2}c$; Soweit steht dieser krummen Linie Scheitel von C ab.

III.

III. Des Winkels DCL Tangente ist = cōt LCA = $\frac{a}{c}$. So gehört für die gerade Linie CL, der Abscisse U, die Ordinate $Z = \frac{a}{c}.U$.

IV. Da ist $Z^2 - Y^2 = \frac{1}{4}a^2$ und $Z - Y = \frac{a^2}{4.(Z+Y)}$, folglich CL, Asymptote der krummen Linie (I).

V. Es ist also, wie aus (402) erhellt, eine Hyperbel, deren Abscissen auf ihrer kleinen Axe genommen sind, ihre Abscissen und Ordinaten, den Ordinaten und Abscissen y, u, parallel.

VI. Aehnliche Hälften von ihr fallen innerhalb der Winkel NCL, lCO; und zwischen ihren Scheiteln liegt die kleine Axe, die grosse aber in dem Raume wo keine Ordinaten von ihr sind, das Gegentheil von (402).

VII. Diese Hyperbel und die vorhin betrachtete zusammen heissen hyperbolae coniugatae.

VIII. Der Winkel ihrer Asymptoten NCL ist stumpf. Rechnete man Abscissen, auf CD von ihrem Scheitel der um $\frac{1}{2}c$ von C absteht, so fände man zwischen diesen Abscissen, deren jede $= U - \frac{1}{2}c$; und ihren Ordinaten Y eine Gleichung wie die (389). Sie hätte auch einen Parameter für die kleine Axe, wie so was bey der Ellipse statt fand (371. II.).

417. Erkl. I. Die gleichseitige Hyperbel (aequilatera) heißt, deren Axen (389. 399) unter sich, und also dem Parameter gleich sind.

II. Also ist für sie CA = AE; folglich ACE = $\frac{1}{2}$R und der Asymptotenwinkel ECe ein rechter, daher man diese Hyperbel auch die rechtwinklichte nennt. Ihre Gleichung ist $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$ (402).

III. Soll die Ordinate möglich seyn, so ist u grösser als $\frac{1}{2}$a.

Man stelle sich um C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschrieben vor, seine Abscisse vom Mittelpuncte an auf CA genommen, heisse auch u, die Ordinate z. So ist $z^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$. Also z möglich, so lange u kleiner als $\frac{1}{2}$a ist, darnach unmöglich.

Der Kreis berührt die Hyperbel in A. Und so geben beyde krumme Linien zusammen Etwas, wo jedem u mögliche und unmögliche Ordinaten gehören, dem u das im Kreise mögliche Ordinaten hat, unmögliche wenn man es als Abscisse der Hyperbel betrachtet, und dem, das in der Hyperbel mögliche Ordinaten hat, unmögliche, wenn man es als Abscisse des Kreises betrachten wollte, die über ihn hinaus reicht.

Einiges Allgemeine über vorhergehende drey krumme Linien.

418. I. Der Gang jedes Schenkels der Parabel nähert sich immer mehr, einem Gange mit der

der Axe parallel (355. III.); der Gang jedes Schenkels der Hyperbel, immer mehr dem Gange seiner Asymptote, die von der Axe divergirt (408). So unterscheidet sich die Gestalt beyder krummen Linien, um eine Axe, selbst durch einen Scheitel beschrieben. Parabola brachia vt ita dicam, non vt Hyperbole expandit, sed contrahit ab infiniti complexu, semper plus quidem complectens, at semper minus appetens, cum Hyperbole, quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat, sagt Kepler, Paralipomena in Vitellionem, cap. IV. pag. 93. wo mehr witzige Bemerkungen, über die drey krummen Linien vorkommen, die Kepler als aus dem Kegel geschnitten betrachtet (unten 550.).

II. Wenn man in der Gleichung für die Ellipse (362), b ungeändert lässt, aber a immer wachsen, so nähert sich die Gleichung immer mehr der Gleichung für die Parabel (383); das druckt man so aus: die Ellipse verwandele sich in eine Parabel, wenn a unendlich wird.

III. Stellt man sich vor, a werde nachdem es unendlich war, wiederum endlich, so ist es verneint (Geom. 12. S. 14. Zus.) und die Gleichung für die Ellipse verwandelt sich in die für die Hyperbel (389).

IV. Das könnte man so abbilden: In der 12. Fig. bleibt der Ellipse Scheitel A, der entgegengesetzte B, rückt immer weiter und weiter weg, folglich auch C; und gewiß f, diese Puncte kön-

Läſſt man die Abſciſſen immer um was weniges wachſen, ſo bekömmt man die Puncte der krummen Linie nahe genug beyſammen, daß man die Lücken zwiſchen ihnen aus freyer Hand ausfüllen kann, welches für die Ausübung zulänglich iſt. So findet man berechnete Tafeln für die Parabel in mehrern Büchern Schotti Magia Optica (Magia naturalis Pars I. Würzb. 1657.) Lib. VII. Cap. 3. Von Claudii Mydorgii, Prodromi catoptricorum et dioptricorum Lib. IV. Paris 1641. lehrt das II. B. Beſchreibungen dieſer krummen Linien durch Puncte. M. zieht ſie den organiſchen vor, quae non aeque late pateant, nec ita in promtu ſint. Bekanntlich braucht man Beſchreibungen durch Puncte, ſelbſt für kleine Bogen groſſer Kreiſe. Geometr. Abhandl. I. Samml. n. 43.

Von den Linien der zweyten Ordnung.

419. Erkl. I. Es ſey 16. Fig. AP = x; PM = y; der Winkel APM = π; und $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$; wo die griechiſchen Buchſtaben willkührliche beſtändige Gröſſen bedeuten; ſo heiſſt die krumme Linie mMNn eine Linie der zweyten Ordnung.

II. Vermöge der Erläuterungen die ich im 66. S. der Geometrie gegeben habe, verhält es ſich mit den Bedeutungen der griechiſchen Buchſtaben folgendergeſtalt.

Ich

VI. Dieſes beruht auf der Lage der geraden Linien welche die krumme berühren. Ich zeige es Anal. Unendl. 99. u. f. von Ellipſe und Parabel, woraus es leicht für Hyperbel hergeleitet wird. Kepler ſagt von dieſen Puncten: lucis cauſſa, et oculis in mechanicam intentis focos appellabimus. Ich habe jetzo nicht Luſt nachzuſehen ob das Wort ſchon vor ihm iſt gebraucht worden. Porta Magia natural. Lib. XVII. c. 15. handelt von dem Gebrauche der Parabel zum Brennſpiegel (Katoptr. 45.) giebt aber dem Puncte wo ſie brennt, keinen Nahmen, Hauſen. Elem. Matheſ. in Elem. Section. Conicar. Prop. XXVII. cor. 4. ſagt bey der Parabel: focum dixerunt recentiores, und Prop. XXVIII. cor. 2. bey der Ellipſe: alii vmbilicos vocant. Apollonius puncta ex comparatione dixit. Ex focorum proprietatibus, an multae innotuerint veteribus, incertum.

VII. Werkzeuge dieſe krummen Linien zu beſchreiben, wie (208) erwähnt, ſind allemahl ſehr zuſammengeſetzt, und für die Ausübung viel unbequemer und unſicherer, als der Zirkel für die Beſchreibung des Kreiſes. Auch kann man ihnen meiſtens nur eine geringe Gröſſe geben, und ſo dienen ſie nicht dieſe krummen Linien ſo groß zu verzeichnen, als der Gebrauch ſie erfodert, z. E. die Parabel zum Brennſpiegel.

VIII. In ſolchen Fällen kann man Abſciſſen annehmen, und die Ordinaten dazu berechnen.

Läſſt man die Abſciſſen immer um was weniges wachſen, ſo bekömmt man die Puncte der krummen Linie nahe genug beyſammen, daß man die Lücken zwiſchen ihnen aus freyer Hand ausfüllen kann, welches für die Apsübung zulänglich iſt. So findet man berechnete Tafeln für die Parabel in mehrern Büchern Schotti Magia Optica (Magia naturalis Pars I. Würzb. 1657.) Lib. VII. Cap. 3. Von Claudii Mydorgii, Prodromi catoptricorum et dioptricorum Lib. IV. Paris 1641. lehrt das II. B. Beſchreibungen dieſer krummen Linien durch Puncte. M. zieht ſie den organiſchen vor, quae non aeque late pateant, nec ita in promtu ſint. Bekanntlich braucht man Beſchreibungen durch Puncte, ſelbſt für kleine Bogen groſſer Kreiſe. Geometr. Abhandl. I. Samml. n. 43.

Von den Linien der zweyten Ordnung.

419. Erkl. I. Es ſey 16. Fig. $AP = x$; $PM = y$; der Winkel $APM = \pi$; und $o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$; wo die griechiſchen Buchſtaben willkührliche beſtändige Gröſſen bedeuten; ſo heiſſt die krumme Linie mMNn eine Linie der zweyten Ordnung.

II. Vermöge der Erläuterungen die ich im 66. S. der Geometrie gegeben habe, verhält es ſich mit den Bedeutungen der griechiſchen Buchſtaben folgendergeſtalt.

Ich

Ich ſetze jedes Glied der Gleichung hat zwo Dimenſionen.

So hat α deren zwo, iſt ein Product aus zwo geraden Linien, β, γ, ſind jedes eine gerade Linie; δ, ε, ζ, haben keine Dimenſion, werden ſie durch Linien ausgedruckt, ſo iſt jedes ein Quotient, wo Diviſor und Dividend gleichviel Linien enthalten.

III. Soll die Gleichung einer krummen Linie gehören, ſo muß ſie zwo veränderliche Gröſſen, Abſciſſe, und Ordinate enthalten. Soll ſie den zweyten Grad nicht überſteigen, ſo müſſen in keinem ihrer Glieder, die veränderlichen Gröſſen mehr als zwo Dimenſionen haben. Es kann in ihr auch Glieder geben, wo die veränderliche Gröſſe nur eine Dimenſion hat, oder auch gar keine da muß dann die Gleichheit der Dimenſionen durch unveränderliche Gröſſen erhalten werden.

IV. Soll ſie den zweyten Grad erreichen ſo muß wenigſtens ein Glied vorhanden ſeyn, das in Abſicht auf die veränderlichen Gröſſen, zwo Dimenſionen hat, alſo das Quadrat einer veränderlichen, oder ſowohl der einen als der andern Quadrat, oder ein Product aus beyden, ohne die Quadrate oder mit ihnen.

V. So kann die Gleichung enthalten, in Abſicht auf die veränderlichen Gröſſen drey Glieder von zwo Dimenſionen von denen wenigſtens eins da ſeyn muß.

Zwey

Zwey von einer Dimenſion, wenigſtens eins davon. Eins von keiner Dimenſion, das auch fehlen kann. Das giebt wenn kein Glied fehlt, ſechs Glieder, die zuſammen $=0$ geſetzt werden. Alſo müſſen unter ihnen welche verneinte Werthe haben.

VI. Soll eine ſolche Gleichung nicht ſechs Glieder enthalten ſo ſetzt man der welche fehlen ihre Coefficienten $=0$.

VII. Nebſt den ſechs Coefficienten, gehört noch zu Beſtimmung der krummen Linie, der Winkel π den die Coordinaten machen. Es iſt klar, daß nicht eben die krumme Linie bleiben würde, wenn man eben die PM, an eben die CM in einem andern Winkel ſetzte.

420. Zuſ. Wenn $\pi = 90°$; und $0 = \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon$; $\zeta = 1$ und $\beta = -a$ ſo wird aus dieſer Gleichung die (349); wenn $0 = \alpha = \gamma = \varepsilon$; $\zeta = 1$; $\delta = b$; $\beta = \pm \frac{b}{a}$ ſo wird aus ihr die 362; 369; Alſo ſind Parabel, Hyperbel und Ellipſe Linien der zweyten Ordnung.

421. I. Man ſetze $\delta = 0 = \varepsilon = \zeta$; ſo iſt $0 = \alpha + \beta . x + \gamma . y$ eine Gleichung vom erſten Grade, welche gegen die (340) folgendes Verhalten hat

hie	$-\beta$	$-\gamma$	$-\alpha : \gamma$
dorten	b	a	c

Nähm-

nähmlich α ist ein Product aus zwo Linien (419. II.) das mit einer dividirt, eine giebt.

II. So ist die gerade Linie von der ersten Ordnung. Ihre Gleichung ist in der (419) enthalten, weil natürlich, jede vollständige höhere Gleichung, auch alle Glieder der niedrigern enthält.

III. Es sey $\alpha = o = \beta = \gamma = \varepsilon$; Aus $o = + \delta . x^2 + \zeta . y^2$ wo δ und ζ eins bejaht das andre verneint seyn muß (419. V.) folgt

$$y = \pm x . \sqrt{\frac{-\delta}{\zeta}}.$$

Das bestimmt also für jede Abscisse, zwo Ordinaten eine bejahte und eine verneinte, entgegengesetzte, sonst gleiche. Die Ordinaten verhalten sich wie die Abscissen, die bejahten unter sich, und die verneinten auch so.

Also sind die Endpuncte jeder Reihe von Ordinaten, in einer geraden Linie, und die Gleichung bestimmt zwo gerade Linien, die beyde aus dem Anfange der Abscissen, auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie ausgehen.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so liegen sie so wie die Asymptoten CL, Cl, der Hyperbel 14. Fig.

Allemahl, bey jedem Coordinatenwinkel, geben jede Ordinate, und ihre entgegengesetzte zusammen, eine gerade Linie wie Ll in angeführter Figur die von der Abscissenlinie halbirt wird.

Also

Also eine Reihe Dreyecke, die am Anfange der Abscissen, als gemeinschaftlicher Spitze, einen Winkel gemeinschaftlich haben und parallele Grundlinien.

IV. Damit in der Gleichung (419) welches Glied man will fehlen kann, brauche ich sechs unbestimmte Coefficienten; Sonst liessen sich dieselben leicht auf fünf bringen, wenn man mit einem, mit welchem man wollte, jedes Glied der Gleichung dividirte, da bekäme alsdann das Glied mit dessen Coefficienten man dividirt hätte 1 zum Coefficienten, und könnte also nicht fehlen.

V. So folgt aus (419) auch $0 = 1 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} . y + \frac{\delta}{\alpha} x^2 + \frac{\varepsilon}{\alpha} . x . y + \frac{\zeta}{\alpha} . y^2$.

Weil man jeden der fünf Quotienten als eine einzige unbestimmte Grösse ansehen kann, so wären solcher Grössen hie nur fünf. Aber diese Formel liesse sich nicht auf eine Gleichung anwenden, wo kein ganz unveränderliches Glied seyn sollte, wie auf die drey Gleichungen in (420).

VI. Durch einen Kunstgriff liesse sich doch das bewerkstelligen. Wenn man $\alpha = 0$ setzte, so würden alle die Glieder in (V) wo die Zähler nicht $= 0$ sind, unendlich (Trig. 4. Erkl. 4. Zus.). Also wären die Glieder wo dieses statt findet, jedes

jedes unendlich, und müßten für sich zusammen $= 0$ seyn ohne die 1 in Betrachtung zu ziehen, weil diese in Vergleichung mit jedem verschwindet.

Gezwungen sieht das freylich aus, lehrt aber soviel daß für $\alpha = 0$, die Gleichung (V) mit der (419) einerley giebt, nur unbequemer ausgedruckt ist.

VII. Sind beyder Coordinaten Quadrate vorhanden, so gehören jeder Abscisse zwo Ordinaten, jeder Ordinate zwo Abscissen, mögliche oder unmögliche. Ist nur das Quadrat einer dieser Linien vorhanden, und kein Product aus beyden, so gehören zweene Werthe von ihr, jedem Werthe der andern, aber jedem Werthe von ihr, nur einer der andern. Beyspiele geben die Gleichungen (420). Ist das Product der Coordinaten vorhanden, und ein Quadrat, oder alle beyde, so gehören jeder Abscisse zwo Ordinaten, und jeder Ordinate zwo Abscissen, weil jede Coordinate durch die andre vermittelst einer quadratischen Gleichung gegeben ist.

VIII. Man setze es fehlen beyde Quadrate, aber das Product ist da. So kömmt $y = \frac{-\alpha - \beta . x}{\gamma + \varepsilon . x}$.

Da gehört offenbahr einer und derselben Abscisse nur eine durch sie bestimmte Ordinate, auch so einer und derselben Ordinate nur eine Abscisse.

Wenn

Wenn man aber die Abscisse von eben der Grösse, nur entgegengesetzt nimmt so hat man für diese verneinte Abscisse auch eine Ordinate

$$y^* = \frac{-\alpha + \beta . x}{\gamma - \varepsilon . x}.$$

IX. Weil die Gleichung für eine krumme Linie seyn soll, so können in (VIII) nicht α und β zugleich $= 0$ seyn, denn da liesse sich die Gleichung mit y dividiren und gäbe $0 = \gamma + \varepsilon . x$. Daß der Zähler in VIII. alsdann $= 0$ würde, zeigt eben an die Gleichung lasse sich mit y dividiren (225).

Eben so können nicht α und γ zugleich $= 0$ seyn, wohl aber β und γ, wie bey der Hyperbel (412).

X. Wenn man in (VIII) Zähler und Nenner nach x ordnet, giebt die Division (6) $y = -\frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{\beta . \gamma - \alpha . \varepsilon}{\varepsilon . (\varepsilon . x + \gamma)}$.

Wenn nun x immer wächst, so nimmt dieses Ausdrucks zweyter Theil immer ab, und wird kleiner als jede gegebene Grösse, weil x so groß werden kann als man will. Der Werth der Ordinate, nimmt alsdann auch immer ab, und kömmt der Gränze $\frac{-\beta}{\varepsilon}$ so nahe als man will, ohne sie völlig zu erreichen so lange die Abscisse noch einen endlichen Werth hat. Zieht man also in der Gränze die ich genannt habe,

eine

eine gerade Linie der Abscissenlinie parallel, so ist dieselbe Asymptote der krummen Linie.

Für $\beta = 0$ ist es die Abscissenlinie selbst, wie bey der Hyperbel (412) CQ der 14. Fig.

XI. In (VIII) ist auch $x = \frac{-\gamma . y - \alpha}{\varepsilon . y + \beta}$ $= \frac{-\gamma}{\varepsilon} + \frac{\beta . \gamma - \varepsilon . \alpha}{\varepsilon . (\varepsilon . y + \beta)}$, welcher Werth wiederum dem ersten unveränderlichen Theile so nahe kömmt als man will, wenn man y so groß nehmen kann als man will. Nimmt man also auf der Abscissenlinie, vom Anfange der Abscissen, eine Länge $= \frac{-\gamma}{\varepsilon}$ und zieht durch derselben Endpunct eine Parallele mit den Ordinaten, so ist das auch eine Asymptote der krummen Linie.

Für $\gamma = 0$ geht sie durch der Abscissen Anfang selbst wie CI 14. Fig.

XII. Daß eine krumme Linie sich auf beyden Seiten einer Asymptote befinden kann, zeigt die 14. Fig., wo die Schenkel AM, BS auf beyden Seiten einer Asymptote liegen. Also widerspricht dem nur gewiesenen nicht, daß nach (VIII) die krumme Linie auf beyden Seiten einer geraden Linie die durch den Anfang der Abscissen, den Ordinaten parallel liegt, ins Unendliche fortgeht.

Allgemeine Auflösung der Gleichung (419. I.).

XIII. Weil $y^2 = -\frac{(\varepsilon.x+\gamma).y}{\zeta} - \frac{(\delta.x^2+\beta.x+\alpha)}{\zeta}$; So ist (78) $y = \frac{\varepsilon.x+\gamma}{2.\zeta}.(-1 \pm \sqrt{(1-4.\zeta.\left(\frac{\delta x^2+\beta.x+\alpha}{(\varepsilon.x+\gamma)^2}\right)})$

XIV. Was unter dem Wurzelzeichen steht nenne man $1-4.\zeta.w$. Nach unten (625) ist das dortige x hie $= -4.\zeta.w$ und die Wurzel wird durch eine Reihe so ausgedruckt: $1-2.\zeta.w-2.(\zeta.w)^2-4.(\zeta.w)^3....$

XV. Braucht man die Wurzel mit dem obern Zeichen +; so kömmt $y = -(\varepsilon.x+\gamma).w.(1+\zeta.w+4.\zeta^2.w^2....)$ wo in der Reihe immer höhere und höhere Potenzen von ζ vorkommen.

XVI. Ist also diese Grösse $= 0$; oder fehlt in der Gleichung das Quadrat der Ordinate, so findet sich $y = -\left(\frac{\delta.x^2+\beta.x+\alpha}{\varepsilon.x+\gamma}\right)$.

XVII. Braucht man die Wurzel mit dem untern Zeichen so kömmt $y = \frac{\varepsilon.x+\gamma}{2.\zeta}.(-2+2.\zeta.w...)$ welches unendlich wird wenn man $\zeta = 0$ setzt.

Nie

Nie können in 419. I. $\varepsilon, \gamma, \zeta$, alle drey $= 0$ seyn, sonst fehlte die Ordinate gar. Daher ist in dem angegebenen Ausdrucke der Dividend nicht $= 0$ wenn der Divisor es ist.

Sonst, wo beyde zugleich verschwinden, kann man allgemein nicht angeben was der Quotient wird, man muß es aus der jedesmaligen Beschaffenheit dieser Grössen bestimmen. Man sehe hierüber meiner Trigon. 20. Satz 3. Zus. IX u. f.

XVIII. Löset man also die Gleichung (419. I.) auf als eine in welcher das Quadrat von y enthalten ist, so giebt für den Fall, da dieses Quadrat fehlt, die Gleichung einen endlichen Werth von y, und zeigt an, ein anderer sey unendlich.

XIX. In (411) setze man $CQ = x$; $QM = y$ also $x.y - \frac{a^2 + c^2}{16} = 0$. So ist $\alpha = -\frac{(a^2 + c^2)}{16}$; $\beta = 0 = \gamma = \delta = \zeta$; $\varepsilon = 1$ und (XVI) giebt $y = +\frac{(a^2 + c^2)}{16.x}$ wie gehörig.

Dieses ist also die endliche Ordinate. Sie liegt der Asymptote Cl parallel, wenn man den Ausdruck gebraucht, sie schneide diese Asymptote im Unendlichen, so schneidet sie eben da der Hyperbel Schenkel Am, welcher nach dem ähnlichen Ausdrucke im Unendlichen mit der Asymptote zu-

sammen kömmt. So gehören der Abscisse CQ, eine endliche Ordinate und eine unendliche nach (XVII).

XX. Bey der Parabel (349) liessen sich Abscissen und Ordinaten verwechseln, man könnte AG = x; GM = y nennen (11. Fig.) so wäre die Gleichung $x^2 - b.\ y = 0$ und in (419. I.) $\alpha = 0 = \beta = \varepsilon = \zeta$; $\gamma = -b$; $\delta = 1$; da gibt (XVI) $y = \frac{x^2}{b}$ wie gehörig. In XVII. würde $\varepsilon.\ x + \gamma = -b$; Also käme hier auch eine zweyte unendliche Ordinate, für jede Abscisse AG.

Läßt sich aus (418. I.) erklären. Jede Parallele mit der Axe kann angesehen werden, als käme sie mit der Parabel im Unendlichen zusammen.

422. Aufg. Aus der Gleichung (419) eine zwischen BQ = t; QM = u; zu finden, wenn die Lage der neuen Abscissenlinie CQ und der neuen Ordinaten MQ gegeben sind.

I. Die neue Abscissenlinie, schneidet die erste in einem gegebenen Puncte, C, so daß AC = f; und unter einem gegebenen Winkel PCQ = γ. (Man muß gegenwärtige Bedeutung dieses Buchstabens, und die (419) als Coefficient bey y nicht verwechseln).

Der Anfang der neuen Abscissen steht auf der neuen Abscissenlinie von C, um CB = g ab.

Die

Die neue Ordinate macht mit ihrer Abscisse, den Winkel BQM = $\varkappa$, und schneidet die alte Abscissenlinie, in T, unter dem Winkel CTQ = $\tau = 180^\circ - \gamma - \varkappa$.

Von der alten Ordinate, MP wird die neue Abscissenlinie in O geschnitten, so ist CQP = $\pi - \gamma$. Daher der Winkel den die neue Ordinate mit der alten macht, PMQ = $\mu = \pi - \gamma - \varkappa$.

Die bisher benannten Grössen sind alle unveränderlich, und durch die Lage der neuen Abscissenlinie und der neuen Coordinaten gegeben.

II. Im Dreyecke TCQ ist $CT = \frac{CQ.\ \sin \varkappa}{\sin \tau}$ auch $= f + x + PT$. Ferner $CQ = g + t$; Endlich $PT = \frac{y.\ \sin \mu}{\sin \tau}$. Daher

III. $f + x + \frac{y.\ \sin \mu}{\sin \tau} = \frac{(g+t).\ \sin \varkappa}{\sin \tau} = CT$.

IV. $MT = y.\ \sin \pi : \sin \tau$ und $TQ = CT.\ \sin \gamma : \sin \varkappa$ also weil $MT + TQ = u$, aus (III)

V. $\frac{y.\ \sin \pi}{\sin \tau} + \frac{(g+t).\ \sin \gamma}{\sin \tau} = u$ oder

VI. $y = (u.\ \sin \tau - (g+t)\ \sin \gamma) : \sin \pi$.

VII. Folglich aus (III) $x = \frac{(g+t).\ \sin \varkappa}{\sin \tau} - \frac{(u.\ \sin \tau - (g+t)\ \sin \gamma).\ \sin \mu}{\sin \tau.\ \sin \pi} - f$.

VIII. Wenn man nun diese beyden Werthe VI; VII; statt y; x; in 419. setzt, so bekömmt man eine Gleichung zwischen u; t.

IX. Wäre BK die neue Abscissenlinie, mit der vorigen parallel, so könnte man sich vorstellen, eine gerade Linie drehe sich um B aus der Lage BC so, daß ihr Durchschnitt mit BA immer weiter weg von A rücke, AC immer wachse wodurch zugleich der Winkel C den sie mit der ersten Abscissenlinie macht, immer abnimmt. In dem Producte g. sin γ, nimmt also der erste Factor immer zu, der andre immer ab, und die Gränze ist: der erste unendlich, der andre verschwindend, indem sich BC in die parallele Lage Bc gedreht hat.

X. Was ein Product ist von dem ein Factor unendlich wird der andre verschwindet, lässt sich allgemein nicht sagen. Kann man aber ein veränderliches Product angeben, das jenem veränderlichen immer gleich ist, und doch ein Paar Factoren hat, wo das Unendlich werden und Verschwinden nicht eintritt, so liesse sich dieses statt jenes brauchen.

XI. Das führt darauf, die Lage der neuen Abscissenlinie so zu bestimmen, daß man das Product aus dem Unendlichen in das Verschwindende wegschafft.

XII. Man ziehe durch B, der neuen Abscissen Anfang, eine gerade Linie mit den neuen Ordinaten parallel welche die vorige Abscissenlinie in

D,

D, ſchneidet. Sie iſt alſo gegeben, BD = k; daher iſt auch AD = h gegeben, und daraus CD = f + h, Ferner CBD = $\varkappa$, CDB = τ (I) DCB = γ.

XIII. BC: BD = ſin CDB: ſin C giebt g. ſin γ = k. ſin τ.

XIV. CD: CB = ſin CBD: ſin CDB giebt (f + h). ſin τ = g. ſin $\varkappa$.

XV. Weil $\mu = \pi + \tau - 180°$; alſo ſin μ = − ſin $(\pi + \tau)$; aber $\varkappa = 180° - \gamma - \tau$ ſo iſt

ſin $\varkappa$. ſin π = ſin $(\gamma + \tau)$. ſin π
ſin γ. ſin μ = − ſin $(\pi + \tau)$. ſin γ

Dieſe Producte ſind das

1te = ſin γ. coſ τ. ſin π + coſ γ. ſin τ. ſin π
2te = − ſin π. coſ τ. ſin γ − coſ π. ſin τ. ſin γ

Ihre Summe = ſin τ. ſin $(\pi - \gamma)$.

XVI. Nun hat man aus VI. XIII. $y = \frac{(u-k).\ \text{ſin}\ \tau - t.\ \text{ſin}\ \gamma}{\text{ſin}\ \pi}$.

XVII. Ferner aus III. XIV. (x − h). ſin τ = t. ſin $\varkappa$ − y. ſin μ.

XVIII. Und nun, aus (XVI) $x - h = \frac{t}{\text{ſin}\ \pi} \cdot \frac{\text{ſin}\ \varkappa.\ \text{ſin}\ \pi + \text{ſin}\ \gamma.\ \text{ſin}\ \mu}{\text{ſin}\ \tau} - \frac{(u-k).\ \text{ſin}\ \mu}{\text{ſin}\ \pi}$.

XXIX. Und x. sin π =

$$-t.\sin(\pi-\eta-\theta)+u.(\sin\pi-\eta-\theta-\varkappa)$$
$$\frac{-e}{\sin\tau}.(\sin\eta.\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa)+\sin(\theta+\varkappa).\sin\pi)$$

XXX. Es ist $\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa) =$

$$\sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa)-\cos(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa)$$
$$=\sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa)-(\cos\pi.\cos\eta+\sin\pi.\sin\eta).\sin(\theta+\varkappa)$$

Das mit sin η multiplicirt giebt in (XXIX) des Factors der in $\frac{-e}{\sin\tau}$ multiplicirt ist, ersten Theil, und wenn man dazu den zweyten Theil addirt, kömmt dieser Factor =

$$\sin\eta.\sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa)$$
$$+\cos\eta.\sin(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa)$$
$$=\sin(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa+\eta)$$

Das Product aus diesem Factor in $\frac{-e}{\sin\tau}$ ist also $=+e.\sin(\pi-\eta)$.

XXXI. Und so kömmt aus (XXIX)

$$x=\frac{\left\{\begin{array}{l}+u.\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa)\\-t.\sin(\pi-\eta-\theta)\\+e.\sin(\pi-\eta)\end{array}\right\}}{\sin\pi}$$

Es

Prof. Lipſ., Lipſ. 1784. Betrifft, wie der Titel anzeigt überhaupt was hie 419 u. f. abgehandelt wird. Herr Rüdiger iſt ſeit 1792. Profeſſor der Philoſophie und aſtronomiſcher Obſervator zu Leipzig. Herr Prof. Hindenburgs Vorrede, enthält ſehr viel Belehrendes (ſ. oben 209.) Er findet daſelbſt pag. VII. die beyden Formeln (hie XXI.) aus Betrachtung der Figur.

XXV. Man kann auch den Winkel der Abſciſſenlinien ganz wegſchaffen, folgender Geſtalt. Durch beyde Anfänge der Abſciſſen, ziehe man die gerade Linie AB = e. Sie macht mit den Abſciſſenlinien gegebene Winkel BAP = η; ABQ = θ; und es iſt $\gamma = \eta + \theta - 180^{\circ}$. Daher $\sin \gamma = -\sin(\eta + \theta)$; $\sin(\gamma + \varkappa) = -\sin(\eta + \theta + \varkappa) = \sin \tau$ (XV); $\sin(\pi - \gamma) = -\sin(\pi - \eta - \theta)$; $\sin(\pi - \gamma - \varkappa) = -\sin(\pi - \eta - \theta - \varkappa)$.

XXVI. ABD = ABQ − DBQ = $\theta + \varkappa - 180$, daher im Dreyecke ABD; $\frac{\sin BAD.\ AB}{\sin ADB}$ = BD = k (XII) = $\frac{e.\sin\eta}{\sin\tau}$; und $\frac{\sin ABD.\ AB}{\sin ADB}$ = AD = h = $-\frac{e.\sin(\theta+\varkappa)}{\sin\tau}$.

XXVII. So kömmt (XXI) $y = \frac{-u.\sin(\eta+\theta+\varkappa) + t.\sin(\eta+\theta) - e.\sin\eta}{\sin\pi}$

XXIX. Und x. $\sin\pi =$

$-$ t. $\sin(\pi-\eta-\theta) + $ u. $(\sin\pi-\eta-\theta-\varkappa)$

$\frac{-e}{\sin\tau}$. $(\sin\eta.\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa) + \sin(\theta+\varkappa).\sin\pi)$

XXX. Es ist $\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa) =$

$\sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa) - \cos(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa)$

$= \sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa) - (\cos\pi.\cos\eta + \sin\pi.\sin\eta).\sin(\theta+\varkappa)$

Das mit $\sin\eta$ multiplicirt giebt in (XXIX) des Factors der in $\frac{-e}{\sin\tau}$ multiplicirt ist, ersten Theil, und wenn man dazu den zweyten Theil addirt, kömmt dieser Factor $=$

$\sin\eta.\sin(\pi-\eta).\cos(\theta+\varkappa)$

$+ \cos\eta.\sin(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa)$

$= \sin(\pi-\eta).\sin(\theta+\varkappa+\eta)$

Das Product aus diesem Factor in $\frac{-e}{\sin\tau}$ ist also $= +e.\sin(\pi-\eta)$.

XXXI. Und so kömmt aus (XXIX)

$$x = \frac{\left\{\begin{array}{l}+ \text{u.}\sin(\pi-\eta-\theta-\varkappa)\\ - \text{t.}\sin(\pi-\eta-\theta)\\ + e.\sin(\pi-\eta)\end{array}\right\}}{\sin\pi}$$

Es

Es sey die zweyte Abscissenlinie der ersten parallel.

XXXII. Also $\eta + \theta = 180°$ und

$$y = + \frac{u. \sin x - e. \sin \eta}{\sin \pi}$$

$$x = - \frac{u. \sin (\pi - x) + t. \sin \pi + e. \sin (\pi - \eta)}{\sin \pi}$$

XXXIII. Man kann hie noch besondere Fälle entwickeln. Dergleichen wäre einer wenn beyde Abscissen einen Anfang hätten, also $e = o$.

Da gehen C, A, B, in einen Punct zusammen, man hat (XXV) $\eta + \theta = 180 + \gamma$ also (XXVII)

$$y = + \frac{u. \sin (\gamma + x) - t. \sin \gamma}{\sin \pi}$$

in XXXI.

$$x = - \frac{u. \sin (\pi - x - \gamma) + t. \sin (\pi - \gamma)}{\sin \pi}$$

XXXIV. Beyde Abscissenlinien könnten hie auch einerley Richtung haben da wäre $\gamma = o$ und nur die Coordinatenwinkel unterschieden.

XXXV. Beyde Abscissenlinien, liegen auf einer geraden Linie, nur die Anfänge der Abscissen sind unterschieden.

Ich setze AB = e fällt auf die Verlängerung von CA, so ist $\gamma = o = \eta$; $\theta = 180°$ also

(XXVII) $y = + \frac{u. \sin x}{\sin \pi}$ und XXXI.

$x =$

$$x = -\frac{u \cdot \sin(\pi - \varkappa)}{\sin \pi} + t + e.$$

Fällt B von A nach C zu, so ist e verneint.

Allgemeine Erinnerung.

XXXVI. Die bisher gewiesenen Verfahren, sind nicht auf die Linien der zweyten Ordnung eingeschränkt, sondern dienen jeder Linie Gleichung zwischen x; y; in eine zwischen t, u; zu verwandeln. Das erhellt daraus, weil nicht angegeben ist, auf was für Potenzen x; y; steigen sollen.

XXXVII. Die Formeln (XXVII; XXXI.) verdienen vor den andern den Vorzug weil sie auser den Coordinaten nur eine einzige gerade Linie, und vier zu Bestimmung der Lagen nöthige Winkel enthalten, zugleich diese Gröſſen in einer leicht zu übersehenden Ordnung darstellen.

423. I. Man hat also allemahl

$$y = P.t + Q.u + R$$
$$x = S.t + T.u + V$$

wo die grossen Buchstaben unveränderliche Gröſsen andeuten.

II. Z. E. in (422. XXVII; XXXI.) wäre

$$P = \frac{\sin(\eta + \theta)}{\sin \pi}; \quad S = -\frac{\sin(\pi - \eta - \theta)}{\sin \pi}$$

u. s. w.

III. In VI. VII. auch in XVI. XIX. müsste man erst die gegebenen unveränderlichen geraden Linien

Linien mit ihren Coefficienten absondern. So käme z. E. in (XIX) $V = h + \frac{k. \sin \mu}{\sin \pi}$. Dieses bestätiget was (423. XXXIV) gesagt ist.

VI. Wenn man nun die Werthe (I) in die Gleichung (419. I.) setzt erhält man, nach gehöriger Rechnung

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \left.\begin{array}{l} \zeta . P^2 \\ + \varepsilon . P . S \\ + \delta . S^2 \end{array}\right\} . t^2 \quad \left.\begin{array}{l} + 2 . \zeta . P . Q \\ + \varepsilon . Q . S \\ + \varepsilon . P . T \\ + 2 . \delta . S . T \end{array}\right\} . t . u \\
& + \left.\begin{array}{l} \zeta . Q^2 \\ + \varepsilon . Q . T \\ + \delta . T^2 \end{array}\right\} . u^2 \quad \left.\begin{array}{l} + 2 . \zeta . P . R \\ + \varepsilon . R . S \\ + \varepsilon . V . P \\ + 2 . \delta . S . V \\ + \gamma . P \\ + \beta . S \end{array}\right\} . t \\
& \left.\begin{array}{l} + 2 . \zeta . Q . R \\ + \varepsilon . R . T \\ + \varepsilon . V . Q \\ + 2 . \delta . T . V \\ + \gamma . Q \\ + \beta . T \end{array}\right\} . u \quad \begin{array}{l} + \zeta . R^2 \\ + \varepsilon . V . R \\ + \delta . V^2 \\ + \gamma . R \\ + \beta . V \\ + \alpha \end{array}
\end{aligned}
$$

VII.

VII. Die drey oder vier obersten Zeilen in jedem Gliede dieser Gleichung, gehören den drey Gliedern in (419. I.) die zwo Abmessungen enthalten, die beyden untern in den Coefficienten bey t, und u denen die nur eine enthalten, und so auch in dem Gliede das keine veränderliche Grösse enthält, die vierte und fünfte Zeile, dazu kömmt da noch die sechste, das unveränderliche Glied aus der Gleichung (419. I.). Die Glieder nur genannter Gleichung, sind bey gegenwärtiger, von der rechten Hand gegen die linke gebraucht worden.

VII. Diese Gleichung, enthält von t und u, keine höhern Abmessungen, als die (419). Daß sie aber beyde Quadrate von t und von u, und zugleich auch t. u enthalten müßte läßt sich nicht behaupten, denn es könnten ja bey einem oder dem andern Quadrate, oder bey dem Producte, ein Coefficient, oder mehrere = o seyn. Die Möglichkeit hievon läßt sich nicht läugnen, da hie so viel Grössen vorkommen, die so mancherley Bestimmungen gestatten; Sie erhellt aber deutlich aus den schon bekannten Gleichungen für Parabel, Ellipse und Hyperbel, die für die ersten dieser Gleichungen, enthalten nur Quadrate, einer der beyden Coordinaten, und die für die Hyperbel zwischen den Asymptoten, enthält kein Quadrat nur ein Product.

VIII. Könnten aber wohl in (VI) alle Glieder fehlen die zwo Abmessungen enthalten? beyde Quadrate und auch das Product?

Weil

Weil $y - R = P.t + Q.u$; und $x - V = S.t + T.u$, so können die genannten Glieder nicht alle zusammen fehlen wenn nicht $(y-R)^2 + (x-V)^2 = 0$. Das kann aber nicht geschehen weil zwey Quadrate möglicher Grössen zusammen nicht $= 0$ seyn können. Auch folgt hieraus, daß die Summe der Glieder, welche zwo Abmessungen enthalten, bejaht seyn muß.

IX. Als ein Exempel, will ich aus der Gleichung für die Hyperbel (402) die für Coördinaten an der Asymptote herleiten. Es sey also, nur die Abscisse in (402) der hiesigen Bezeichnung gemäß, also $CP = x$ genannt, $y^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot x^2 + \frac{1}{4}c^2 = 0$.

So ist in (419) $\pi = 90^\circ$; $\varkappa = \frac{1}{4}c^2$; $\beta = 0 = \gamma$; $\delta = -\left(\frac{c}{a}\right)^2$; $\varepsilon = 0$; $\zeta = 1$.

Nun sey (410) auf der Asymptote $CQ = t$; $QM = u$; der andern Asymptote parallel, und für (422) γ der Winkel den die Asymptote mit der Axe macht, die Abscissenlinie der t, mit der Abscissenlinie der x; daher CQM (14. 16. Fig.) oder $\varkappa = 180^\circ - 2.\gamma$.

Daß in der 16. Fig. CQ unter CP hinunter geht, und in der 14. Fig. hinauf macht keine Aenderung. Wem das anstößig wäre, der dürfte nur 14. Fig. an der Asymptote Cl; durch m eine Parallele mit CL ziehen.

Nun

Nun ist also in (422); tang $\gamma = \frac{c}{a}$; $f = o = g$; $\varkappa = 180° - 2.\gamma$; $\gamma + \varkappa = 180° - \gamma$; $\pi - \gamma - \varkappa = \gamma - 90°$; Daher in (422. XXIII.)

$y = (u - t).\ \text{sin}\,\gamma$; $x = (u + t).\ \text{cos}\,\gamma$.

Folglich in (423. I.) $P = -\text{sin}\,\gamma = -Q$; $R = o$; $S = +\text{cos}\,\gamma = T$; $V = o$; Also $\delta.\,S^2 = -\text{sin}\,\gamma^2 = \delta.\,T^2$, daher bey den Quadraten in 423. VI. jeder Coefficient $= o$; Der bey t. u wird $-2.\text{sin}\,\gamma^2 - 2.\text{tang}\,\gamma^2.$ $+\text{cos}\,\gamma^2 = -4.\text{sin}\,\gamma^2$. Die bey t, u, werden jeder $= o$; der unveränderliche Theil wird $= +\alpha$. So kömmt in 423. VI. $-4.\text{sin}\,\gamma^2.$ $t.u + \alpha = o$; das ist $-\frac{4.c^2.t.u}{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}c^2$ $= o$ welches die Gleichung (412) giebt.

424. Zus. Jede der Gleichungen (419. I. und 423. VI.) ist vom zweyten Grade (419. III. IV.), obgleich die eine nicht eben die Potenzen oder das Product ihrer Coordinaten enthält wie die andere. Hat also eine krumme Linie eine Gleichung vom zweyten Grade, für irgend eine Abscissenlinie, und derselben gehörige Ordinaten, so bekömmt sie für jede andere Abscissenlinie, und dieser gehörige Coordinaten, auch eine vom zweyten Grade. Solchergestalt enthält die Gleichung (419. I.) alle Gleichungen für jede krumme Linie der zweyten Ordnung, was auch die Abscis-

senli-

senlinie für eine Lage hat, und was auch der Coordinatenwinkel ist.

425. Zus. Soll sie vom zweyten Grade bleiben, so können nicht δ; ε; ζ; alle drey zugleich $= 0$ seyn; wären der erste und der dritte Buchstabe $= 0$, der mittlere vorhanden so bliebe sie noch vom zweyten Grade. Wie alsdann sich sagen läßt daß jeder Abscisse zwo Ordinaten gehören, lehret (421. XVIII.).

426. Lehrs. Keine Linie der zweyten Ordnung kann von einer geraden Linie in mehr als zween Puncten geschnitten werden.

Bew. I. PE sey eine willkührlich gezogene gerade Linie, man ziehe eine willkührliche Abscissenlinie AP, die sie in P schneide, und suche die Gleichung für die Coordinaten $AP = x$; $PM = y$. Weil in dieser Gleichung y nicht höher als auf das Quadrat steigen kann (424), so gibt es für ein AP nicht mehr als zwo Ordinaten PM; PN; d. i. die gerade Linie kann nicht mehr als zweene Durchschnittspuncte M; N; mit der krummen haben.

II. Eine quadratische Gleichung hat zwo mögliche Wurzeln, oder zwo unmögliche. Findet das letzte statt, so wird die Linie der zweyten Ordnung von der geraden gar nicht geschnitten; wie wenn 16. Fig. durch C oder A, der PE eine Parallele gezogen wäre.

III. Die beyden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, können auch gleich seyn. Da gingen die beyden Durchschnitte in einen zusammen, und die gerade Linie wäre Tangente der krummen. Hievon unten (452).

IV. Auch enthielte die Gleichung die man fände, vielleicht das Quadrat von y nicht; alsdann müsste doch x. y in ihr seyn (419. IV.), da liesse sich nur ein Durchschnitt der geraden mit der krummen angeben der andere würde angesehen als wäre er ins Unendliche gerückt (421. XVIII. und XX.).

V. Man kann also den Satz, vollständig so abfassen: **Eine Linie der zweyten Ordnung, wird von einer geraden, zweymahl geschnitten, oder gar nicht, oder berührt, oder einmahl, in einer endlichen Entfernung, das zweyte mahl im Unendlichen.**

VI. Das nicht mehr dessen ich mich im ersten Ausdrucke des Satzes bedient habe, liesse sich kurz darthun, und alsdann, was Alles in ihm liegt, vollständiger entwickeln.

427. Aufg. **Von einer Linie der zweyten Ordnung sind fünf Puncte M; N; F; G; H; gegeben; Man soll die Coefficienten (419) für willkührlich angenommene Coordinaten bestimmen.**

Aufl. Man ziehe durch zween der gegebenen Puncte N; M; eine Ordinate; NMP; und mit ihr die andern FI; GS; HL; parallel. Die Längen

gen dieſer Linien, nebſt ihren Durchſchnitten mit der willkührlich angenommenen Abſciſſenlinie ſind alſo gegeben. Daher iſt

I) $o = \alpha + \beta . AP + \gamma . PM + \delta . AP^2 + \varepsilon . AP . PM + \zeta . PM^2$

II) $o = \alpha + \beta . AP + \gamma . PN + \delta . AP^2 + \varepsilon . AP . PN + \zeta . PN^2$

III) $o = \alpha + \beta . AI + \gamma . IF + \delta . AI^2 + \varepsilon . AI . IF + \zeta . IF^2$

IV) $o = \alpha + \beta . AS + \gamma . SG + \delta . AS^2 + \varepsilon . AS . SG + \zeta . SG^2$

V) $o = \alpha + \beta . AL + \gamma . LH + \delta . AL^2 + \varepsilon . AL . HL + \zeta . LH^2$

In dieſen fünf Gleichungen ſind die Linien gegebene Gröſſen, und man hat nur fünf unbekannte, nähmlich $\alpha : \zeta$; $\beta : \zeta$; $\gamma : \zeta$; $\delta : \zeta$; $\varepsilon : \zeta$; weil man durchgängig mit ζ dividiren kann. Jede dieſer gegebenen Gröſſen iſt nur von der erſten Abmeſſung, und nirgends eine mit der andern multiplicirt, man findet alſo für jede einen einzigen Werth (63), der allemahl möglich iſt (34), weil hier keine Wurzeln ausgezogen werden.

428. Zuſ. Fünf Puncte beſtimmen eine einzige krumme Linie der zweyten Ordnung. Es dürfen aber von ihnen nicht drey in einer geraden Linie liegen (426). Nähme man ſie ſo an, ſo würde man für die geſuchte Linie eine Gleichung des zweyten Grades bekommen, die aber nicht

für eine zusammenhängende krumme Linie, sondern für zwo gerade Linien gehörte; z. E. für die gerade Linie durch NFG; und für die durch MK; diese Gleichung würde sich in zweene einfache Factoren $(y - ax - b)$. $(y - cx - d)$ zerfällen lassen; deren Product

$$yy - axy - by + acx^2 + bcx + bd - c - d + ad$$

keine Gleichung für eine krumme Linie ist, sondern die beyden Gleichungen für zwo gerade enthält, aus denen es entstehet.

429. Zus. Zwo Linien der zweyten Ordnung können einander in nicht mehr als vier Puncten schneiden.

430. Anm. Damit wird nicht geläugnet, das besondere Gattungen solcher Linien, schon durch weniger Puncte bestimmt werden, und einander auch nicht einmahl in vier Puncten schneiden können. Ein Exempel ist der Kreis (Geom. 17. S. 4.). Die Sache muß aus den besondern Bestimmungen erkläret werden, welche die allgemeine Gleichung bekömmt, wenn man sie für eine solche besondere Gattung einrichtet. Die 17. Fig. stelle einen Kreis vor, dessen Mittelpunct C und der Halbmesser $= r$ ist. Will man die Abscissenlinie nach Gefallen annehmen, so ziehe man die Ordinaten senkrecht auf sie: Will man die Ordinaten nach Gefallen annehmen, so setze man die Abscissenlinie senkrecht durch sie. Also läßt sich der Kreis allemahl durch eine Gleichung

chung zwischen senkrechten Coordinaten bestimmen. Mit der Abscissenlinie sey ein Durchmesser ICG parallel, also das Perpendikel auf die Abscissenlinie CD = h = LP; und AH = g; LG = PH = g − x, LC = LG − CG = g − x − r und aus der Natur des Kreises $LC^2 = CM^2 - LM^2$ oder $(g-x-r)^2 = r^2 - (h-y)^2$, wo nur drey Grössen g, r, h zu bestimmen sind, auch giebt diese Gleichung geordnet

$$g^2 + 2.(r-g).x - 2.h.y + x^2 + y^2 = 0$$
$$- 2.r.g$$
$$+ h^2$$

Folglich ist in 419. allemahl für den Kreis $\alpha = g^2 - 2rg + h^2$; $\beta = 2(r-g)$; $\gamma = -2h$; $\delta = 1$; $\varepsilon = 0$; $\zeta = 1$. Es lassen sich daher in 427. nur drey Grössen als unbekannt ansehen, aber δ, ε, ζ sind schon gegeben, daher kann man nach 427. nur drey Puncte zur Bestimmung eines Kreises annehmen, weil man α, β, γ zu bestimmen nur drey Gleichungen annehmen darf.

Eben so werden andere Linien der zweyten Ordnung durch weniger als fünf Puncte bestimmt, wenn statt der fehlenden Puncte andere Bestimmungen angegeben sind. Z. E. die Parabel 11. Fig. ist durch die Lage ihrer Axe; den Scheitel A; und einen einzigen andern Punct M gegeben; Weil alsdann MP; AP gegeben sind und $MP^2 : AP$ den Parameter giebt (349), daraus sich die Parabel beschreiben lässt (361).

431. Lehrs. Für jede Reihe von parallelen Sehnen MN einer Linie der zweyten Ordnung 17. Fig. gibt es einen Durchmesser, eine gerade Linie IO die sie alle halbirt.

Bew. Man ziehe auf die Sehnen eine Abscissenlinie senkrecht, so daß AP = x; PM und PN = y; so kann man (424) allemahl annehmen

$$\zeta . y^2 + (\varepsilon . x + \gamma) . y + \delta . x^2 + \beta . x + \alpha = 0$$

Die Gleichung muß gewiß das Quadrat von y enthalten, weil es zu einer Abscisse AP, zwo Ordinaten, giebt. Also ist nicht etwa $\zeta = 0$.

Aufgelöst giebt sie $y = -\frac{(\varepsilon . x + \gamma) \pm r}{2 . \zeta}$

wo ich r statt $\sqrt{((\varepsilon x + \gamma)^2 - 4 . \zeta . (\delta x^2 + \beta . x + \alpha))}$ setze.

Weil nun von den beyden Werthen, jeder eine der beyden Ordinaten bedeutet, so sey PN $= -\frac{(\varepsilon x + \gamma) + r}{2 . \zeta}$; PM $= -\frac{(\varepsilon . x + \gamma) - r}{2 . \zeta}$

daher $MN = \frac{r}{\zeta}$. Es sey $ML = \frac{1}{2} MN$; und man nenne PL = z; so ist $z = -\frac{(\varepsilon . x + \gamma)}{2 . \zeta}$

eine Gleichung für eine gerade Linie in welcher sich jedes L befindet das mitten in einer MN liegt.

Aus Fuhrm. mitaed. in anal. insp. T. II. pag. 8. 432.

432. Zuſ. Sie ſchneidet die Abſciſſenlinie in O; daß AO $= -\gamma : \varepsilon$ (340) folglich PO $= -(\gamma + \varepsilon x) : \varepsilon$ und tang O $= \frac{PL}{PO} = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, welches die Lage des Durchmeſſers gegen die Abſciſſenlinie beſtimmt.

433. Zuſ. Für den Winkel aber, unter welchem er die Sehnen halbirt, iſt tang PLO $= \frac{PO}{LP}$ $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$.

434. Zuſ. I. Der Durchmeſſer ſchneide die krumme Linie in I; ſo müſſen da, M, N zuſammen gehen, oder es wird (431) r $= o$; alſo $(\varepsilon^2 - 4.\zeta.\delta).x^2 + (2.\varepsilon.\gamma - 4.\zeta.\beta).x + \gamma^2 - 4.\alpha.\zeta = o$ daraus kömmt $x = \frac{2.\beta.\zeta - \varepsilon.\gamma \pm v}{\varepsilon^2 - 4.\delta.\zeta}$

wo $v = \sqrt{((2.\beta.\zeta - \varepsilon.\gamma)^2 + (4.\alpha.\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4.\delta.\zeta))}$

Dieſe beyden Werthe von x; ſind AK, AH; wo $KH = \frac{v}{\varepsilon^2 - 4.\delta.\zeta}$.

II. Des Durchmeſſers Länge IG iſt $=$ KH. ſec O, alſo aus (432) $= \frac{KH.\sqrt{(\varepsilon^2 + 4.\zeta^2)}}{2.\zeta}$.

435. Zuſ. Indeſſen können auch beyde Durchſchnitte I; G; unmöglich werden, wofern die Gleichung r $= o$ zwo unmögliche Wurzeln,

nähmlich v unmöglich ist. So verhält es sich mit der Hyperbel kleinen Axe CO 14. Fig. (401). Auch kann ihre Entfernung unendlich werden, wenn $ee = 4\delta\zeta$ (Trig. 4. Erkl. 4. Zus.). In diesem Falle lässt sich ein einziger Durchschnitt angeben, wie für die Axe der Parabel (354) über den andern sehe man 421. XX.

436. Aufg. Man ziehe durch den Punct M, eine gerade Linie Mp, in einem schiefen Winkel, und suche eine Gleichung zwischen den Coordinaten Ap $= t$; pM $= u$; (17 F.).

Auflös. I. Für den Sinustotus $= 1$; sey sin MpO $= \mu$; cos MpO $= \nu$, also $y = \mu . u$; $x = t + \nu . u$.

Dieses in 431. zu setzen, hat man in (423. I.) folgende Vergleichungen

dorten	P	Q	R	S	T	V
hie	0	μ	0	1	ν	0

so bekömmt man aus (423. VI.)

$$\left\{\begin{array}{l}(\zeta.\mu^2 + \varepsilon.\mu.\nu + \delta.\nu^2)u^2 + (\varepsilon.\mu + 2.\delta.\nu).t.u \\ + (\gamma.\mu + \beta.\nu).u + \delta.t^2 + \beta.t + \alpha\end{array}\right\} = 0$$

II. Man kürze dieses so ab:

$$A.u^2 + B.t.u + C.u + \delta.t^2 + \beta.t + \alpha = 0$$

III. Also

$$u^2 = -\frac{(B.t + C).u - (\delta.t^2 + \beta.t + \alpha)}{A}$$

daher $u = -\frac{(B.t + C) \pm W}{2.A}$ wo $W =$

$\sqrt{((B^2}$

$\sqrt{((B^2-4.A.\delta).t^2+(2.B.C-4.A.\beta).t+C^2-\alpha)}$

IV. Die beyden Werthe von u, sind pM, pu, für den ersten — W, für den andern + W.

Wenn man also ihren Unterschied in 1 halbirt, ist $Ml = \frac{W}{2.A}$, und $pl = -\frac{(B.t+C)}{2.A}$.

V. Man fälle von l auf die Abscissenlinie, das Perpendikel lq; Es ist $= -\frac{(B.t+C)}{2.A}.\mu$ verschwindet wo $B.t+C=o$.

VI. Nimmt man also $Ao = -\frac{C}{B}$, so fällt l in die Abscissenlinie.

VII. $Aq = t + pl.\nu = t - \frac{(B.t+C)}{2.A}.\nu$

daher $Ao - Aq = qo = -\frac{C}{B} - t + \frac{B.t+C}{2.A}.\nu = -(B.t+C).\left(\frac{1}{B} - \frac{\nu}{2.A}\right)$

Folglich $\frac{qo}{lq} = \frac{2.A-B.\nu}{B.\mu}$.

VIII. Die unveränderliche Grösse rechter Hand, ist $=$ tang qlo $=$ cot qol.

Also befinden sich alle l, in einer geraden Linie, welche durch o, einen gegebenen Punct der Abscissenlinie geht, und mit ihr daselbst einen gegebenen Winkel macht.

IX. Das heißt: Wie die Reihe Sehnen MN, welche auf der Abscissenlinie senkrecht stehen, durch eine gerade Linie halbirt wird, so wird auch jede andere Reihe Sehnen, die jeden schiefen Winkel mit eben der Abscissenlinie macht, durch eine gerade Linie halbirt.

437. Zus. I. So giebt es einen Durchmesser für jede Reihe paralleler Sehnen. Ich suche nun was ihn angeht, so anzugeben, daß A, B, C (436. II.) durch die beständigen Grössen (431) und den Winkel Mpo $= \varphi$ ausgedruckt werden, dessen Sinus und Cosinus (436. I.) ich bisher gebraucht habe.

II. In (436. VI.) wird Ao $= -\frac{(\gamma + \beta . \cot\varphi)}{\varepsilon + 2.\delta . \cot\varphi} = -\frac{(\gamma . \operatorname{tang}\varphi + \beta)}{\varepsilon . \operatorname{tang}\varphi + 2.\delta}$.

III. In 436. VII. kömmt $\frac{2.A}{B.\mu} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{2_2(\zeta + \varepsilon . \cot\varphi + \delta . \cot\varphi^2)}{\varepsilon + 2.\delta . \cot\varphi} - \cot\varphi = \frac{2.\zeta + \varepsilon . \cot\varphi}{\varepsilon + 2.\delta . \cot\varphi}$. Dieses umgekehrt giebt $\operatorname{tang} Aol = \frac{\varepsilon . \operatorname{tang}\varphi + 2.\delta}{\varepsilon + 2.\zeta . \operatorname{tang}\varphi}$.

IV. Setzt man in (436. III.) W $= o$; so findet man zweene Werthe von t, für deren jeden, u zweene gleiche Werthe hat, oder M, n, in einen Punct

Punct zusammengehen, wie in (434) wo M, N, zusammengehen, zweene Werthe für x.

Es ist hie im Allgemeinen nicht nöthig diese Werthe von t zu berechnen, wenn man nur weiß daß es dergleichen giebt.

Trägt man beyde von A aus, und zieht durch jedes Endpunct eine Parallele mit Mn, so geben sich zweene Puncte i; g; in welchen der Durchmesser die krumme Linie schneidet. Diese seine Länge ig, liegt zwischen den Endpuncten von zwo parallelen gegebenen Linien, zwischen denen ein gegebenes Stück der Abscissenlinie liegt. Sie ist also auch gegeben.

Sie kann aber auch unmöglich werden, wenn die Gleichung $W = o$ zwo unmögliche Wurzeln hat, wie in (435).

438. Zus. Wenn beyde Durchmesser einander in C schneiden, so ist aus Trigon. 19. S. 4. Zus. des Winkels oCO den sie mit einander machen, seine Tangente, ein Quotient, dessen

Dividendus $= \frac{\varepsilon . \text{tang}\,\varphi + 2.\delta}{\varepsilon + 2.\zeta . \text{tang}\,\varphi} - \frac{\varepsilon}{2\zeta}$ (432)

der Divisor $= 1 - \left(\frac{\varepsilon . \text{tang}\,\varphi + 2\delta}{\varepsilon + 2.\zeta . \text{tang}\,\varphi}\right) . \frac{\varepsilon}{2.\zeta}$.

Das giebt $\text{tang}\, oCO =$

$$\frac{4.\zeta.\delta - \varepsilon^2}{(4.\zeta^2 + \varepsilon^2).\text{tang}\,\varphi + 2.\varepsilon.(\zeta + \delta)}$$

439.

439. Zuſ. Der Winkel unter welchem dieſer neue Durchmeſſer ſeine Sehnen halbirt iſt plo = 180° — (φ + pol) alſo ſeine Tangente = — tang (φ + pol) (Trig. 4. Erkl. 1. Zuſ.) alſo nach Trig. 19. S. 3. Zuſ. ein Quotient, deſſen

Dividendus = $\text{tang}\,\varphi + \frac{\varepsilon.\,\text{tang}\,\varphi + 2.\,\delta}{\varepsilon + 2.\,\zeta.\,\text{tang}\,\varphi}$

(437. III.) der Diviſor = $\frac{\varepsilon.\,\text{tang}\,\varphi + 2.\,\delta}{\varepsilon + 2.\,\zeta.\,\text{tang}\,\varphi}$. tang φ — 1. Alſo tang plo =

$$\frac{2.\,(\varepsilon + \zeta.\,\text{tang}\,\varphi).\,\text{tang}\,\varphi + 2.\,\delta}{(2.\,(\delta - \zeta) + \varepsilon.\,\text{tang}\,\varphi).\,\text{tang}\,\varphi - \varepsilon}.$$

440. Aufg. Den Punct C zu finden, wo beyde Durchmeſſer einander ſchneiden.

Aufl. I. Man laſſe von dieſem Puncte auf die Abſciſſenlinie, das Perpendikel CD = h herab, und nenne AD = g.

II. Weil C im Durchmeſſer IG iſt, ſo ſetze man in (431) AD; DC; ſtatt x; z; das giebt $h = -\frac{(\varepsilon.\,g + \gamma)}{2.\,\zeta}$.

III. Weil C in dem andern Durchmeſſer iſt, ſo hat man auch h = Do. tang Aol.

IV. Nun iſt Do = Ao — g. Den erſten Theil hat man in (437. II.) und des Winkels Tangente daſelbſt (III); alſo Do. tang Aol = $-\frac{(\gamma.\,\text{tang}\,\varphi + \beta)}{\varepsilon + 2.\,\zeta.\,\text{tang}\,\varphi}$ — g. tang Aol.

V.

V. Dieſes dem Werthe von h in (II) gleich geſetzt giebt $g.\left(\text{tang AoI} - \frac{\varepsilon}{2.\zeta}\right) = -\frac{(\gamma.\,\text{tang}\,\varphi + \beta)}{\varepsilon + 2.\zeta.\,\text{tang}\,\varphi} + \frac{\gamma}{2.\zeta}$.

VI. Multiplicirt man auf beyden Seiten mit $\varepsilon + 2.\zeta.\,\text{tang}\,\varphi$ ſo kömmt $g = \frac{2.\beta.\zeta - \gamma.\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4.\zeta.\delta}$.

VII. Dadurch den Werth von h ausgedruckt (II) kömmt $h = \frac{2.\gamma.\delta - \beta.\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4.\zeta.\delta}$.

VIII. Dieſe beyden Werthe von g, h, enthalten φ nicht, welches die Schiefe der Ordinaten beſtimmte. Sie bleiben alſo einerley was für einen Winkel die Ordinaten mit der Abſciſſenlinie AO machen.

Nun beſtimmen g und h zuſammen den Punct C in welchem der Durchmeſſer IO, vom Durchmeſſer io geſchnitten wird.

Jener Durchmeſſer gehört Ordinaten die ſenkrecht auf AO ſtehen.

Dieſer Ordinaten, die einen willkührlichen ſchiefen Winkel mit AO machen; Und was für einen, hat in g, h, keinen Einfluß.

Alſo wird der Durchmeſſer IO, von jedem andern, in einem und demſelben Puncte geſchnitten. Oder alle Durchmeſſer ſchneiden einander in einem und demſelben Puncte C.

IX.

IX. Wäre ein Durchmesser, einem andern parallel, so wären sie alle einander parallel, und C, zweener Durchmesser Durchschnitt, würde nach (Geom. 12. S. 12. Zus.) als ein Punct angesehen der sich in jedem der beyden Durchmesser, in unendlicher Entfernung von dem Puncte befände in welchem dieser Durchmesser die krumme Linie schneidet.

X. Wenn man sich vorstellt, ein Punct rükke in IO (17. Fig.) ins Unendliche, ein anderer auch so in io; und nun einen wie den andern C nennt, so ist klar, daß C, von IK unendlich weit entfernt ist.

XI. Wären etwa io, IO, der Abscissenlinie auf welche die Ordinaten MP senkrecht angenommen wurden, der AK, parallel, so läge C nicht weiter von dieser Abscissenlinie als ein Perpendikel von i auf sie angiebt.

XII. Und erstreckte sich da die krumme Linie, von dieser Abscissenlinie, über alle Gränzen, auf einer Seite der Abscissenlinie oder auf beyden, wüchse des Punctes i Abstand von genannter Abscissenlinie über alle Grössen die sich angeben lassen, so müsste auch des Punctes C Abstand über alle Gränzen wachsen.

XIII. Sind aber IO, io, der Abscissenlinie nicht parallel, so ist klar, daß ein Punct der in IO sich über alle Gränzen von I entfernt, auch sich über alle Gränzen von der Abscissenlinie entfernt,

fernt, und auch so ein Punct der in io sich über alle Gränzen von i entfernt.

XIV. Erstreckt sich also die krumme Linie von der Abscissenlinie ins Unendliche (XII), so rückt allemahl C ins Unendliche, sowohl in Absicht auf IK, als in Absicht auf die Abscissenlinie; das ist: es werden allemahl g, und h, zugleich unendlich.

XV. Nach (VI) wird g unendlich wenn $\varepsilon^2 = 4.\zeta.\delta$. Und eben die Voraussetzung giebt auch h unendlich (VII).

XVI. Dagegen liesse sich nur die Einwendung machen: Wäre zugleich $2.\gamma.\delta - \beta.\varepsilon = 0$ so würde durch die Formel (VII) h nicht bestimmt, also liesse sich aus ihr allein wenigstens nicht behaupten daß h unendlich würde.

XVII. Indessen, gäben XV. und XVI. zusammen auch $2.\beta.\zeta - \gamma.\varepsilon = 0$, folglich auch $g = \mathfrak{g}$. Daß sich also aus diesen Formeln weder g noch h bestimmen liesse.

XVIII. Ob sie also beyde zusammen unendlich werden, oder ob eines, oder gar alle beyde, endlich bleiben könnten, müsste aus dem Verhalten entschieden werden, das die Gröszen haben können welche durch die griechischen Buchstaben angedeutet werden.

XIX. Das wäre ohne Zweifel mühsamer als die geometrische Entscheidung (IX .. XIV).

XX.

XX. Unten (465. XII) wird gezeigt daß die Vorausſetzung hie XV. die Parabel giebt. Bey der ſind alſo alle Durchmeſſer parallel. Jeder nähmlich ſchneidet ſie nur einmahl in einem Puncte i, 17. Fig. der ſich angeben läſſt, der andere Durchſchnitt, g, rückt ins Unendliche (wie 421. XX) alſo auch der Punct C der mitten zwiſchen beyden ſeyn ſollte.

441. Zuſ. Ein Durchmeſſer ig, halbirt keine Sehne, die nicht mit den ihm zugehörigen Sehnen Mn, parallel geht. Eine andere Sehne MN; hat einen ihr zugehörigen Durchmeſſer IG, der ſie in L halbirt (431), ſollte ſie nun auch von ig halbirt werden, ſo müſſte ig durch L gehen; aber er geht auch durch C; und ſo hätten ig; IG; zwo unterſchiedene gerade Linien, zweene Puncte gemein.

442. Erkl. Der Punct C, in welchem alle Durchmeſſer einander ſchneiden, heiſſt der Mittelpunct.

443. Lehrſ. Wenn der Durchmeſſer ig die krumme Linie in zween Puncten ſchneidet (434), ſo liegt der Mittelpunct mitten zwiſchen ihnen.

Bew. Sehnen, die mit ig parallel gehen, werden von einem andern Durchmeſſer VC halbirt (437), der alſo auch ig, als eine von ihnen halbirt, und das muß im Mittelpuncte geſchehen (442).

444.

444. Aufg. Den Winkel zu finden den der Durchmesser CV mit der Abscissenlinie macht.

Aufl. Dieser Winkel ist AVC, in eben der Bedeutung in welcher (437) des Durchmessers ig, Winkel Aol das ist AoC war. Nähmlich bey beyden Winkeln, liegt A, linker Hand des Scheitels.

Nennte man den jetzo gesuchten Winkel CVO, so wäre er für diesen Durchmesser, das was CoO für den ig ist.

Man muß unterscheiden welchen von den beyden Nebenwinkeln man meynt, wenn man fragt was eine gerade Linie mit einer andern für einen Winkel macht, wofern sie an dieser andern nur aufsteht nicht sie durchschneidet. Geschieht das letztere so muß man angeben, welchen von den vier Winkeln man meynt, die paarweise Scheitelwinkel sind.

Also: Man sucht den Winkel AVC.

Wie nun AoC aus dem Ordinatenwinkel φ bestimmt ward (437. II.) so wird auch AVC aus dem Ordinatenwinkel CoO bestimmt; Weil sonst alles hie bleibt wie in (437. II.) nur den Ordinatenwinkel ausgenommen.

Folglich ist $\text{tang AVC} = \frac{\varepsilon . \text{tang CoO} + 2.\delta}{\varepsilon + 2.\zeta . \text{tang CoO}}$

wo $\text{tang CoO} = -\text{tang AoC}$.

Aus (437. II.) ist

$$\text{tang } \varphi = \frac{2.\delta - \varepsilon.\ \text{tang AoC}}{2.\zeta.\ \text{tang AoC} - \varepsilon}$$

$$= \frac{2.\delta + \varepsilon.\ \text{tang CoO}}{-2.\zeta.\ \text{tang CoO} - \varepsilon}$$

$$= -\ \text{tang AVC}$$

Folglich ist AVC + Mpo = 180° das ist: **Eine gerade Linie, durch den Mittelpunct (442) mit eines Durchmessers Ordinaten parallel gezogen, ist Durchmesser für die Ordinaten, welche dem vorigen Durchmesser parallel liegen.**

445. Erkl. Diese beyden Durchmesser (444) heissen zusammengehörige (coniugatae). Ihr Winkel ist der Winkel, den die Ordinaten mit ihrem Durchmesser machen.

446. Zus. Wenn der zu ig gehörige Durchmesser, die krumme Linie auch in zweenen Puncten schneidet, so liegt C ebenfalls mitten zwischen ihnen.

447. Lehrs. **Eine Linie ik; die durch des Durchmessers Ende i; mit seinen Ordinaten parallel geht, hat weiter keinen Punct als i mit der krummen Linie gemein.**

Bew. Schnitte sie die krumme Linie noch einmahl, so wäre sie eine Sehne, in der Reihe der Sehnen, welche alle von dem Durchmesser halbirt werden (437). Sie würde also selbst

von

von ihm halbirt, und dieses müsste in i wo er sie schneidet, geschehen; also müsste sie die krumme Linie noch auf beyden Seiten von i, in gleichen Entfernungen davon schneiden, d. i. drey Puncte mit ihr gemein haben wieder (426).

448. Zusatz. Wenn man von i unter dem Durchmesser ig; einen Bogen der krummen Linie so klein man will iM nimmt, und die zu M gehörige Ordinate Mn zieht; so giebt sie wegen der parallelen Lage mit ik; über dem Durchmesser einen Punct der krummen Linie n; der auf eben der Seite von ik liegt, auf welcher sich M befindet; und wenn man gegentheils einen Punct über dem Durchmesser, n, so nahe man will bey i nimmt, und dessen Ordinate nM zieht, so giebt sie auf eben die Art einen Punct M der auf eben der Seite von ik liegt, auf welcher n lag. Man ziehe also eine willkührliche Ordinate Mn, so liegen alle Puncte des Bogens iM auf eben der Seite der Linie ik auf welcher alle Puncte des Bogens in liegen, oder das ganze Stück der krummen Linie Min liegt auf einer Seite der geraden ik.

449. Erkl. Wenn eine gerade Linie einen Punct mit einer krummen gemein hat, und beyde Bogen der krummen Linie von diesem Puncte an; iM; in; auf einer Seite der geraden Linie liegen, so sagt man sie sey eine **Tangente** der krummen; und i ist ein **Berührungspunct**.

450. Zus. Die Linie ik (447) berühret die krumme in i.

451. Anm. Allgemein läßt sich nicht für unmöglich erklären, daß die krumme Linie von der Tangente irgendwo wieder geschnitten werde, wie in H 18. Figur. Aber bey den Linien der zweyten Ordnung geht das nicht an (447).

452. Zus. Wenn die Sehne Mn mit einer parallelen Bewegung nach i zu rückt, so gehen die Puncte M; n; immer näher zusammen, und werden endlich in i zu einem einzigen. Also kann man den Berührungspunct für einen doppelten Durchschnittspunct ansehen; und die Linie der zweyten Ordnung hat deßwegen keinen Punct als i mit der Tangente gemein, weil sie mit keiner geraden Linie mehr als zween Puncte gemein haben kann (426), und i für zween Puncte gilt. So ist I (434) ein Berührungspunct, wo M; N; zusammengehen.

Sätze wie (447 .. 452) finden sich schon in der Elementargeometrie Geom. 6. und 13. Erkl. 19. Satz. Sie in den Anfangsgründen deutlich und überzeugend eingesehen zu haben dient daß man bey ihrer weitern Anwendung, hie, und überhaupt bey krummen Linien, richtig und sicher verfährt.

453. Lehrs. Wenn die Abscissen il = w auf einem Durchmesser, welcher die krumme Linie in zween Puncten, i; g; schneidet, genommen werden, so ist die Gleichung

chung zwischen ihnen und den Ordinaten $ln = z$; $z^2 = \varkappa w + \lambda w^2$.

Bew. Die Gleichung kann keine höhere Potenzen veränderlicher Grössen als die zweyte enthalten (423), und weil die Ordinaten ln; lM; gleich aber entgegengesetzt sind (437), so ist ihre Summe $= o$ (224) und die erste Potenz von z fehlt in der Gleichung. Es ist aber $z = o$ für $w = o$; und für $w = ig$; also muß w für einen Werth von z nähmlich $z = o$; zweene Werthe haben können, folglich das Quadrat von w nebst der ersten Potenz in der Gleichung enthalten seyn; kein vollkommen beständiges Glied aber, das weder w noch z enthielte, kann nicht in der Gleichung seyn, denn diese beständige Grösse müsste $= o$ seyn, weil z und w zugleich o werden können, und sie also allein stehen bliebe.

454. Zus. $ig = -\varkappa : \lambda$.

455. Zus. Die Abscissenlinie il, schneidet angenommener Massen die krumme Linie einmahl in i; berührt sie nicht. Mehr als noch einmahl kann sie die krumme Linie nicht schneiden (426) aber der zweyte Durchschnitt kann ins Unendliche rücken (426, 435); Da ist $\lambda = o$ (454. und Trigon. 4. Erkl. 4. Zus.) und die Gleichung, $z^2 = \varkappa . w$.

456. Lehrs. Es giebt in jeder Linie der zweyten Ordnung Durchmesser, die die krumme Linie in einem, oder in zween Puncten schneiden.

Bew. Wenn ein Durchmeſſer die krumme Linie nicht ſchneidet; ſo muß er zwiſchen zwey Stücken von ihr liegen, wie CD 14. Fig. zwiſchen MAm; RBS; wenn man alſo Parallellinien mit ihm zieht, die dem Stücke MAm immer näher und näher kommen, ſo kömmt man auf eine, die einen Punct, z. E. A mit dieſem Stücke gemein hat, das übrigens ganz auf einer Seite von ihr liegt, d. i. auf eine Tangente (449). Parallelen mit ihr auf der Seite, wo MAm liegt, werden Sehnen, und haben einen Durchmeſſer (437), der durch den Berührungspunct gehen muß (447. 452).

457. Zuſ. Für jede Linie der zweyten Ordnung läſſt ſich eine Gleichung wie 453. oder 455. finden.

458. Aufg. Es iſt eine Gleichung vom zweyten Grade, für ſchiefe Coordinaten AP; PM; 16. Fig. gegeben; man ſoll daraus eine für rechtwinklichte AP; PM; 17. Fig finden.

Aufl. Man fälle 16. Fig. auf die Ordinaten das Perpendikel AR; ſo iſt AP = AR : ſin APM; PR = — AP. coſ APM = — AR. cot APM und PM = RM — PR = RM + AR. cot APM; alſo kann man in der gegebenen Gleichung ſtatt AP; PM; ihre Werthe durch die neuen rechtwinklichten Coordinaten AR; RM; ausgedruckt ſetzen, welches eine Gleichung zwiſchen den letzten giebt. In dieſer Gleichung nun können die Coordinaten AP; PM; 17. Fig. bedeuten.

459.

459. Aufg. Aus jeder Gleichung des zweyten Grades eine wie 453. herzuleiten.

Aufl. I. Man bringe sie auf eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten, AP, PM 17. Fig. (458).

II. Aus dieser mache man eine zwischen willkührlich schiefwinklichten Ap = t; pM = u; 17. Fig. (436).

III. Man suche das t, wo M, n, zusammengehen (436. IV).

IV. Bekömmt es zweene mögliche Werthe, so giebt einer davon, Ak, in die Gleichung (II) gesetzt die Ordinate ki, welche zugleich Tangente ist (447); Auch so der andere in die Gleichung gesetzt, die Ordinate oder Tangente an g.

V. Auch ist ig gegeben (437. IV), die Lage der Linie io (437. III) und der Winkel ilm (439).

VI. Also findet man nach (423) aus der Gleichung zwischen Ap; pM, eine zwischen il; lM.

VII. Die weitläuftige Rechnung braucht hie nicht dargestellt zu werden, wo ich nur die Möglichkeit zeigen will.

VIII. Würden die beyden Werthe von t (III) unmöglich, so brauche man statt ig, den zugehörigen Durchmesser (445. 456).

460. Zus. Die Ordinate durch den Mittelpunct, für welche $w = -x : 2\lambda$ (454) ist $= \frac{1}{2}n$.

$\frac{1}{2}z.\sqrt{(-1:\lambda)}$ unmöglich, wofern nicht λ verneint ist.

461. Zuſ. $w = -\frac{z}{2\lambda} - Cl$; in die Gleichung (453) geſetzt, gibt $z^2 = \lambda . Cl^2 - \frac{z^2}{4\lambda}$.

462. Zuſ. Dieſe Gleichungen (453. 461) haben, nachdem λ bejaht oder verneint iſt, eine verſchiedene Geſtalt mit den Gleichungen für die Hyperbel (389. 402) und Ellipſe (362. 368). Nur daß hier die Coordinaten nicht rechtwinklicht angenommen werden. Für die Parabel läßt ſich die 461. ſo unmittelbar nicht brauchen, weil der Parabel Mittelpunct als unendlich entfernt angeſehen werden müßte (384), aber 453. erfodert für die Parabel nur $\lambda = 0$; das iſt den Durchmeſſer ig unendlich (455) wie die Axe (383). In der Parabel nähmlich werden wegen des unendlich entfernten Mittelpuncts, alle Durchmeſſer unter ſich, und mit der Axe parallel ſeyn (Geom. 12 S. 12. Zuſ.).

463. Lehrſ. In jeder Linie der zweyten Ordnung, giebt es einen Durchmeſſer, ig. 17. F. der ſeine Sehnen ſenkrecht halbirt.

Bew. I. Für dieſen Fall iſt tang Mlo unendlich, alſo (439) $\varepsilon . \tang \varphi^2 + 2.(\delta - \zeta).\tang \varphi - \varepsilon = 0$. Daraus $\tang \varphi = \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right)}$.

II.

II. Weil die Grösse unter dem Wurzelzeichen allemahl bejaht ist, so sind beyde Werthe möglich, und der Frage thun zweene Ordinatenwinkel genug.

III. Ist nähmlich io; 17. Fig. ein Durchmesser, der die Parallelen Mn, in l senkrecht halbirt, so halbirt sein zugehörjger (445), Parallelen mit io, unter dem Winkel VCo = plo = 90 Grad.

IV. Man hat auch tang $\varphi = \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon}$.

$$\left(1 \pm \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta - \delta}\right)^2\right)}\right).$$

V. Es sey $\frac{\varepsilon}{\zeta - \delta} = \text{tang}\,\psi$; So sind nach Trigon. 19. S. 10. Zus. die beyden Werthe von tang φ;

der erste $= \frac{\cot\psi \,.\, \text{tang}\,\psi}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi} = \cot\frac{1}{2}\psi$

der zweyte $= -\cot\psi \,.\, \text{tang}\,\psi \,.\, \text{tang}\,\frac{1}{2}\psi = -\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$.

Also sind die beyden Werthe von φ; der erste $= 90° - \frac{1}{2}\psi$ der andere $= 180° - \frac{1}{2}\psi$.

VI. Der erste sey lpo = CVo (444). Weil nun VCo = 90 Gr. so sey CVo = 90 Gr. — $\frac{1}{2}\psi$; da ist CoV = $\frac{1}{2}\psi$ und der Nebenwinkel = 180 Gr. — $\frac{1}{2}\psi$.

VII. Wenn also ein Durchmesser, seine Ordinaten senkrecht schneidet, so machen diese Ordina-

dinaten, mit der Abscissenlinie AO, den Winkel Mpo = 90 Gr. — $\frac{1}{2}\psi$; Er selbst macht mit ihr den Winkel CoO = 180 Gr. — $\frac{1}{2}\psi$; und ihm parallel geht eine Reihe Ordinaten, die auch von ihrem Halbmesser, dem zugehörigen des ersten, senkrecht geschnitten werden, für welche also der zweyte Werth von φ gehört.

VIII. Wenn $\varepsilon = 0$ kömmt $\psi = 0$; CVo = 90 Gr. da nun VCo eben so groß ist, wird Co der AO parallel, und o geht ins Unendliche, da CoV verschwindet. Bey diesem Fortrücken des Punctes o auf CO ins Unendliche, kömmt er über O hinaus, weil solches ein Punct ist dessen Lage ungeändert bleibt; also bleibt der in (VI) genannte Nebenwinkel nicht CoO, denn wenn o über O hinaus noch auf AO läge, so wäre CoO einerley mit CoV. Dieses erinnere ich deßwegen, damit die Lage der Puncte in der 17. Fig. keinen Anstoß giebt.

IX. Ist ε vorhanden, und $\zeta = \delta$, so wird $\psi = 90$ Gr. und CVo = CoV = 45 Gr.

X. Ist $\varepsilon = 0$; und $\zeta = \delta$, so ist in (V) tang ψ unbestimmt. Was das bedeutet, zeigt sich in (439). Da giebt diese Voraussetzung, tang $plo = \frac{2.\delta.\sec\varphi^2}{0}$. Also: Was auch die schiefen Ordinaten mit der Abscissenlinie AO für einen Winkel machen, so werden sie allemahl von ihrem Durchmesser senkrecht geschnitten. Daher

ist

ist ψ eben so wohl unbestimmt als φ welcher durch ψ soll bestimmt werden.

In diesem Falle muß $\delta = \zeta$ vorhanden seyn, weil die Rede von einer krummen Linie ist (421. I.).

464. Lehrs. Es giebt keine andere Linien der zweyten Ordnung, als die Parabel (349) Ellipse (362) Hyperbel (389).

Bew. Jede Linie der zweyten Ordnung hat einen Durchmesser, der seine Sehnen senkrecht halbirt (463). Die Gleichung zwischen Abscissen auf diesem Durchmesser genommen, und den zugehörigen halben Sehnen (457), ist allemahl mit einer von den drey Gleichungen 349. 362. 389. einerley (462) und der Ordinatenwinkel ein rechter, welches bey (462) noch fehlte. Also ist eine Linie von der zweyten Ordnung allemahl eine der genannten.

465. Aufg. Aus der Gleichung (419) was auch der Ordinatenwinkel ist, zu beurtheilen, ob sie zu einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel gehöret.

I. Die Ellipse hat keine unendlichen Schenkel, die Parabel deren zweene, zwischen denen die Axe durchgeht, beyde aber auf eine Seite eines Perpendikels durch ihren Scheitel auf die Axe; Die Hyperbel hat vier unendliche Schenkel, ein Paar auf einer Seite der Axe und ein Paar auf der andern, auch ein Paar auf jeder

Seite

Seite eines Perpendikels auf die Axe durch den Mittelpunct.

Nun muß man aus der Gleichung entwickeln welches dieser Kennzeichen die Coefficienten angebe.

II. In 421. (XIII. XIV) ist $1-4.\zeta.w=$

$$\frac{\left.\begin{array}{l}\varepsilon^2\\ -4.\zeta.\delta\end{array}\right]x^2+2.\varepsilon.\gamma\Big].x+\gamma^2\left.\begin{array}{l}\\ -4.\zeta.\beta\end{array}\right]\left.\begin{array}{l}\\ -4.\zeta.\alpha\end{array}\right.}{(\varepsilon.x+\gamma)^2}$$

III. Nachdem für einen angenommenen Werth von x, diese Grösse, bejaht, o, oder verneint ist, nachdem gehören diesem x; zwey mögliche y, oder nur ein bestimmtes, oder gar kein mögliches.

Das kömmt nun auf den Dividendus an, weil der Divisor allemahl bejaht ist.

IV. Der Dividendus läßt sich so ausdrucken:

$$x^2.\left((\varepsilon^2-4.\zeta.\delta)+\frac{2.(\varepsilon.\gamma-2.\zeta.\beta)}{x}+\frac{\gamma^2-4.\zeta.\alpha}{x^2}\right)$$

Es sey $\varepsilon^2-4.\zeta.\delta$ bejaht.

V. Wenn x so groß werden kann als man will, so nimmt in dem zweyten Factor, jeder der Theile wo sich x im Divisor befindet immer ab und wird so klein als man will. Was also auch jedes dieser Theile unveränderliche Dividendus für eine Grösse hat, so können allemahl diese Theile so klein werden, daß sie zusammen weniger

niger betragen als der erste unveränderliche. Die veränderlichen Theile, mögen also beyde bejaht seyn, oder beyde verneint, oder einer bejaht, der andere verneint, so läßt sich allemahl x so groß nehmen daß sie zu dem ersten unveränderlichen gesetzt, etwas bejahtes geben, wie dieser unveränderliche Theil selbst ist.

VI. Folglich läßt sich allemahl x so groß annehmen, daß $1 - 4.\zeta.w$ bejaht ist, und wenn das für irgend einen bejahten Werth von x statt findet, so findet es für alle folgende grössere bejahte Werthe statt. Und auch so, wenn es für irgend einen verneinten Werth statt findet, für alle folgende grössere verneinte. Weil nähmlich x^2 allemahl bejaht ist.

VII. So giebt es allemahl grosse bejahte x; für welche $y = \frac{s.x + \gamma}{2.\zeta}.(-1 \pm \sqrt{(1 - 4.\zeta.w)})$ möglich ist, und wenn y für ein solches x möglich ist, ist es für alle folgende grössere möglich.

Auch so, giebt es grosse verneinte x, für welche ein doppelter Werth von y möglich ist, und wenn dergleichen für ein solches x möglich ist, ist auch dergleichen für alle folgende grössere möglich.

VIII. So erstrecken sich ins Unendliche, zweene Schenkel für bejahte x, und eben soviel für verneinte. Setzt man also auf die Abscissenlinie wo man will ein Perpendikel, so geht die krum-

krumme Linie, auf jeder Seite dieses Perpendikels mit zween Schenkeln ins Unendliche.

Das thut die Parabel nicht (I) die Ellipse hat keine unendlichen Schenkel; also giebt die Vorausseßung vor (V) die Hyperbel.

Es sey $\varepsilon^2 - 4.\zeta.\delta$ verneint.

IX. Da zeigt (V) es lasse sich allemahl x so groß annehmen, daß der zweyte Factor in (IV) verneint ist, und wenn einmahl ein bejahtes oder ein verneintes x dieses leistet, so bleibt es allemahl so für grössere bejahte oder verneinte.

X. Und folglich, weil x^2 allemahl bejaht ist, wird für die x (IX), $1 - 4.\zeta.w$ verneint, und y in (421. XIII) hat zweene unmögliche Werthe.

XI. Also giebt diese Vorausseßung, nur mögliche y für x bis auf eine gewisse Grösse, unmögliche für alle grössere. Sie gehört also der Ellipse.

Es sey $\varepsilon^2 - 4.\zeta.\delta = 0$.

XII. Da wird in (IV) der Dividendus

$$x.\left(\begin{matrix}2.\varepsilon.\gamma\\ -4.\zeta.\beta\end{matrix} + \frac{\gamma^2 - 4.\zeta.\alpha}{x}\right).$$

XIII. Da kann man allemahl x so groß annehmen, daß der zweyte Factor bejaht oder verneint ist, nachdem es $2.\varepsilon.\gamma - 4.\zeta.\beta$ ist. Und hat man einmahl ein solches x, so bleibt das Bejahte oder Verneinte für alle grössere.

XIV.

XIV. Folglich ist $1 - 4.\zeta.w$, bejaht wenn das x (XIII) bejaht ist, und $2.\varepsilon.\gamma - 4.\zeta.\beta$ auch bejaht, oder: wenn beyde verneint sind, oder: wenn eins bejaht ist, das andere verneint.

XV. Wenn also $1 - 4.\zeta.w$ für ein x wie (XIII) bejaht ist, so ist es für das entgegengesetzte, sonst gleiche, verneint.

XVI. Ist also

$$y = \frac{\varepsilon.x + \gamma}{2.\zeta}.\left(-1 \pm \sqrt{(1 - 4.\zeta.w)}\right)$$

für grosse x möglich, so ist es für die entgegengesetzten sonst gleichen unmöglich, und die krumme Linie erstreckt sich ins Unendliche, mit zween Schenkeln nur auf einer Seite eines Perpendikels auf die Abscissenlinie, nicht auf der andern. Ist also eine Parabel.

Es sey $\varepsilon = 0$.

XVII. Sind da ζ, δ, beyde bejaht, oder beyde verneint, so ist die krumme Linie eine Hyperbel, eine Ellipse, wenn eins bejaht ist, das andere verneint, eine Parabel wenn eins von beyden $= 0$ ist.

Es sey $\zeta = 0$.

XVIII. Wenn ε nicht $= 0$ ist, so ist die krumme Linie eine Hyperbel (VIII) ihre Gleichung findet sich (421. XVI). Ist aber auch $\varepsilon = 0$ so kömmt die Parabel (XVII). Man sehe (421. XX).

Allge-

Allgemeine Erinnerung.

XIX. Ob also die allgemeine Gleichung, zur Parabel, Ellipse oder Hyperbel gehört, entscheidet sich aus den Coefficienten der Glieder die zwo Dimensionen der veränderlichen Grössen enthalten; auf die welche nur zu einer Dimension gehören kömmt hiebey nichts an. Nähmlich, blos jene Coefficienten, bestimmen, ob, und wieviel unendliche Schenkel die krumme Linie hat.

466. Anm. Meine Absicht ist nur gewesen, die ersten Begriffe von den Linien der zweyten Ordnung zu geben. Ich kann mich also in eine ausführliche Untersuchung ihrer Eigenschaften, die besondere Bücher ausfüllen, nicht einlassen. Man hat ausser dem Apollonius, und andere die sie als Kegelschnitte betrachtet haben, die häufige Arbeiten der Neuern, seitdem Cartesius die Eigenschaften der krummen Linien aus den Gleichungen analytisch herzuleiten angewiesen hat. Hie nur einige: Io. de Witt Elementa curuarum, unter den Commentariis über Cartesens Geometrie, de l'Hôpital, Sections coniques, Par. 1720.; Euler Introd. in Analys. inf. L. II. C. V. Hubens Vers. einer analytischen Abhandl. von den Kegelschnitten, Götting. 1759. Meine Vorrede enthält Betrachtungen über Beschaffenheit und Gebrauch des analytischen Vortrages.

Exempel

Exempel anderer krummen Linien, und allgemeine Lehren von ihnen.

467. Erkl. Eine algebraiſche krumme Linie heiſſt, für die ſich eine algebraiſche Gleichung (323) geben läſſt. Sie iſt von der zweyten, dritten, vierten u. ſ. w. Ordnung, nachdem die Gleichung auf den zweyten, dritten, vierten u. ſ. w. Grad ſteigt. Die Gleichung heiſſt aber vom Grade n; Wenn die höchſte Potenz von x; oder die von y; oder alle beyde n erreichen, oder wenn Producte aus x in y enthalten ſind, in denen die Abmeſſungen von x und y zuſammengerechnet n ausmachen, aber nicht überſchreiten. Die gerade Linie ſelbſt gehört zur erſten Ordnung; daher man auch mit Newton (enumerat. linear. tert. ord.) krumme Linien von dem erſten, zweyten, dritten, u. ſ. w. Geſchlechte nennen könnte, wo die Gleichung auf den zweyten, dritten, vierten u. ſ. w. Grad ſteigt.

So iſt die Gleichung (412) vom zweyten Grade, weil p und q zuſammen die zweyte Abmeſſung ausmachen. Wenn die Gleichung zwiſchen AP und PM 16. Fig. ein Glied wie $x^m . y^n$ enthält; ſo kömmt, aus 422. VI. VII. in der Potenz m von x; die Potenz m von t und von u; und in der Potenz n von y die Potenz n von t und von u vor, wenn man ſtatt x; y; ihre Werthe durch t und u ausgedrückt ſetzt. Alſo wird das Glied das $x^m y^n$ enthielte, in der Gleichung zwiſchen t und u ſolche geben, welche die

Potenzen $m + n$; von t und von u enthalten. Es kann vielleicht Fälle geben, da die Glieder der Gleichung zwischen t und u welche die Potenz $m + n$ von t und von u enthalten, einander auch aufheben, aber dieses kömmt auf die Lage der neuen Abscissenlinie BQ und den Anfang der neuen Abscissen B an; und also werden sich dergleichen Abscissen allemahl so nehmen lassen, daß sich die Glieder, welche die Potenzen $m + n$ von u und t; enthalten, nicht aufheben. Hieraus wird begreiflich, warum man eine Gleichung, die $x^m . y^n$ enthält, ansehen kann, als wäre sie vom Grade $m + n$. Für den zweyten Grad siehe (425).

468. Anm. Wie weitläuftig die allgemeine Abhandlung solcher krummen Linien werden müsse, ist schon aus der zweyten Ordnung zu ersehen. Ich muß daher auf besondere Schriften davon verweisen, dergleichen Euler; Introd. in Analys. inf. L. II. und Cramer Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques sind. Hier kann ich nur noch an einigen einzelnen Proben zeigen, wie man die Gestalten der krummen Linien aus ihren Gleichungen herleitet, und die Gleichungen aus angegebenen Umständen findet.

469. Erkl. Auf des Halbkreises AOB Durchmesser AB $= a$ stehe BC senkrecht. Man nehme BH nach Gefallen und ziehe AH die den Kreis in I schneidet. Auf ihr nehme man AM $=$ HI; so ist M in der Cissois des Diokles

Von Kissoy, Cissois. 470.

470. Aufg. Die Gleichung für die Cissois zwischen AP = x, PM = y zu finden.

Aufl. BH = ay : x (Geom. 25. S.) und HI. HA = BH²: (Trigon. 16. S. Zus.) aber HA = a. AM : x (Geom. 25. S.) folglich weil HI = AM; BH² = a. AM² : x d. i. $\frac{aayy}{xx}$ = $\frac{a.(xx+yy)}{x}$ also $ayy = x^3 + xy^2$ und $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.

471. Zus. Die Cissoide ist eine Linie von der dritten Ordnung (467) und der Durchmesser AB als die Abscissenlinie theilet sie in ähnliche Hälften. Wie auch daraus erhellt, weil man eben die Verzeichnung mit dem Halbkreise auf des Durchmessers anderer Seite machen kann.

472. Zus. Eine verneinte Abscisse oder eine bejahte die gröſſer als a wäre; gäbe der Ordinate Quadrat verneint. Also ist nichts von der Cissoide unter A noch über B.

473. Zus. y ist = o für x = o und = ∞ für x = a. Auch wächst es mit x, weil der Dividendus wächst, und der Divisor, da x beständig kleiner als a bleibt (472) immer abnimmt. Die krumme Linie geht daher mit dem Schenkel AMN ohne Ende fort weiter von AB weg, und kömmt der BC so nah als man will, erreicht aber BC nie, d. i. BC ist ihre Asymptote (408).

474. Aufg. Die Gestalt der krummen Linie zu finden, deren Gleichung $y = x + \sqrt[3]{(a.(a-x)^2)}$; wo $AP = x$; $PM = y$; 20. Fig.

Aufl. Die Gleichung einfacher zu machen, sey $a - x = u$; also wenn $AB = a$; $BP = u$; Weil jede Cubikwurzel nur einen möglichen Werth hat (237), so giebt es nur ein mögliches y für jedes u. Weil gleiche entgegengesetzte u einerley Quadrat geben, so ist y für $+u$ und für $-u$ einerley, also theilet die Ordinate durch B die krumme Linie in ähnliche Hälften, das kleinste y ist $= a = BD$ für $u = 0$; sonst wachsen die y mit u ohne Ende. Jedem bejahten u gehört ein Punct der krummen Linie rechter Hand und jedem verneinten linker Hand BD zu: und die krumme Linie geht mit zween unendlichen Schenkeln DM, DG von D aus. Jeder Schenkel gehört nur für eine Art von Abscissen, und liegt also ganz an einer Seite von BD; daher schneidet er BD nicht, und BD ist eine Tangente (449). Für $u = -a = BA$ ist $AC = 2a$; die krumme Linie kann von einer geraden in drey Puncten geschnitten werden, wie in E; F; G; die Ursache ist, weil die Gleichung rational gemacht; $(y-a)^3 = au^2$ auf den dritten Grad steiget (unt. 492.).

475. Aufg. F; f; 12. Fig. sind ein Paar gegebene Puncte; M ist ein Punct in einer krummen Linie, und $FM + fm = a$; Man soll diese krumme Linie finden.

Aufl.

Aufl. I. Man halbire Ff in C, nenne CF $=$ Cf $=$ e. Es ist a grösser als 2. e.

II. Man fälle von M auf die gerade Linie durch Ff ein Perpendikel MP $=$ y und nenne CP $=$ u.

III. $FM^2 = e^2 - 2.eu + u^2 + y^2$

$fM^2 = e^2 + 2.eu + u^2 + y^2$

$fM^2 - FM^2 = 4.e.u.$

IV. Arithm. 2. Cap. 5. giebt $fM - FM = \frac{4.e.u}{a}$ und (Trig. 13. Satz) $fM = \frac{1}{2}a + \frac{2.eu}{a}$.

V. Daher auf beyden Seiten quadrirt $e^2 + 2.e.u + u^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2.e.u + \frac{4.e^2.u^2}{a^2}$.

VI. Folglich $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - e^2 - \frac{(a^2-4e^2)}{a^2}.u^2$ (368) die krumme Linie eine Ellipse deren kleine Axe $= \sqrt{(a^2-4.e^2)}$, die grosse $= a$. Was also (378) von der Ellipse gewiesen ist, findet sich bey keiner andern krummen Linie.

VI. Dieß ist eine Probe wie man untersucht ob Eigenschaften die man bey einer krummen Linie gefunden hat, ihr allein, oder noch mehrern zukommen.

VII. Ich rechne die Abscissen von C, weil dieser Punct gegen beyde gegebene, F, f, einerley Lage hat. Hätte ich sie anderswoher, etwa von F oder von f gerechnet, so wäre die Gleichung nicht so einfach geworden. Will man das Gesuchte so einfach als möglich bestimmen, so muß man bemüht seyn, es durch solche Dinge zu bestimmen, die soviel als möglich einerley Verhalten gegen die gegebenen Dinge haben.

476. Aufg. F, f, (14. Fig.) sind wiederum gegebene Puncte, M ist ein Punct in einer krummen Linie und $fM - FM = a$. Man sucht die krumme Linie.

I. Wiederum Ff in C halbirt, und das Perpendikel $MP = y$ herabgelassen sey $Cf = CF = e$; $CP = u$.

II. Hie ist a kleiner als 2. e (Geom. 9. S. 7. Zus.).

III. Weil $FP = u - e$; $fP = u + e$, finden sich auch die Gleichungen (475. II.) und daraus $fM + FM = \frac{4.e.u}{a}$. Folglich $fM = \frac{2.e.u}{a} + \frac{1}{2}a$.

IV. Es kömmt also eben die Gleichung wie (475. V.) nur wird sie wegen hie (II) folgendergestalt geordnet.

V. $y^2 = \frac{4e^2 - a^2}{a^2} \cdot u^2 - (e^2 - \frac{1}{4}a^2)$.

Die

Die krumme Linie ist also eine Hyperbel (402).

VI. Die beyden aus Arithmetik und Trigonometrie hie gebrauchten Sätze, geben einen rationalen Ausdruck für fM, und der, dem Ausdrucke durch die Quadratwurzel gleich gesetzt, giebt also bald die Gleichung für die krumme Linie.

Wenn man $fM \pm FM = a$ (das obere Zeichen für vorige Aufgabe) so behandelt daß man der beyden Linien Werthe durch Quadratwurzeln braucht, so muß man zweymahl quadriren, und dann noch die Zweydeutigkeit entwickeln ob a Summe oder Unterschied ist. So war das Verfahren das ich in vorigen Ausgaben dieses Buches brauchte.

477. Erkl. Wenn von einer geraden Linie MQC 21. Fig. die beständig durch C gehet, ein gegebener Punct sich beständig in der gegebenen geraden Linie BF befindet, so beschreibt ein anderer gegebener Punct M, dieser geraden Linie die Muschellinie (conchoides Nicomedis).

478. Zus. Es sey CE auf BF senkrecht, und M, N seyn zween Puncte der Muschellinie, von denen die Perpendikel MR; NT, auf BF fallen, ferner sey $ECN > ECM$ so ist $NST < MQR$; aber $NS = MQ$; also $NT < MR$ gleichwohl kann nie das Stück QM der durch C gehenden Linie auf BF fallen; also kommen, wenn EQ wächst, die Puncte M, N, der krummen Linie,

der Linie BF immer näher so nah als man will; ohne daß einer je in sie fiele, oder BF ist der Muschellinie Asymptote.

479. Aufg. Die Gleichung für die Muschellinie zu finden.

Aufl. Es sey CE = b; QM = a; MR = EP = x; PM = ER = y; so ist CE : EQ = CP : PM oder b : EQ = b + x : y aber EQ = y — QR und QR = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ also b : y — $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ b + x : y oder by = by + xy — (b + x) $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder (b + x) $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ = xy also $(b^2 + 2bx + x^2).(a^2 - x^2) = x^2 y^2$ oder $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$.
$+ b^2$
$- a^2$

480. Zus. Aus der Gleichung wie sie noch xxyy auf einer Seite allein stehen hatte; wird

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - b^2 - 2bx - x^2$$

wo jedem x zwo gleiche und entgegengesetzte y zugehören, daß also CEA die Muschellinie in ähnliche Hälften theilet. Ferner wird y = ∞ für x = 0; wegen der Asymptote (478).

481. Zus. Aus 479. wird $y = \frac{(b+x).\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$. Es gibt also keine Ordinate für $x^2 > a^2$: Dieses erhellt daraus; QM 21. Fig. ist entweder die Hypotenuse des Dreyecks MQR; also grösser als die Ordinate, oder

oder wenn QM in die Lage EA kömmt, ist es die Ordinate selbst.

Aber es giebt Ordinaten für verneinte x; Man kann nähmlich $Q\mu = a$ auf der andern Seite der Asymptote nehmen, so entsteht der Theil der krummen Linie wie $\lambda\alpha\mu$; Ein Perpendikel von einem solchen Puncte μ, auf die Asymptote ist nie gröſſer als $Q\mu = a$; also gehört auch keine Ordinate, und kein Punct der krummen Linie zu einer verneinten Abscisse die gröſſer als $-a$ ist. Es mag nähmlich die bejahte Abscisse gröſſer als $+a$ oder die verneinte gröſſer als $-a$ seyn, so ist beydemahl $x^2 > a^2$.

Nimmt man also $EA = +a$; $E\alpha = -\alpha$; so geht die krumme Linie durch A und α.

482. Zus. Soll der Pol C ein Punct der krummen Linie seyn, so ist für ihn $x = -b$.

Ist also $b > a$; so ist C kein Punct der krummen Linie, wie in 481. aus der Gleichung und Construction gewiesen worden. In diesem ersten Falle 21. Fig. wird die Conchoide von CE zweymahl, einmahl in A und einmahl in α geschnitten.

483. Zus. Ist aber $b < a$ 22. Fig. so geht die krumme Linie auch durch C; und es gibt in diesem zweyten Falle einen Knoten CDαC nähmlich für jedes verneinte x das gröſſer als $-b$; und kleiner als $-a$ ist, giebt es aus (481) zwey gleiche entgegengesetzte y, wegen des doppelten Zeichens der Wurzelgröſſe. Dieses leich-

ter zu übersehen, setze man $x = -u$, so wird in

481. $y = \frac{b-u}{-u}\sqrt{(a^2-u^2)} = \left(1-\frac{b}{u}\right)$.

$\sqrt{(a^2-u^2)}$ wo für Abscissen die sich zwischen C und α (22. Fig.) endigen, $u > b$ aber $< a$ ist, also $1-\frac{b}{u}$ bejaht und der Werth von y bejaht oder verneint nach dem die Wurzelgrösse genommen wird.

Für $u > a$ wird y unmöglich; aber $= o$ für $u = b$ oder $= a$.

484. Zus. Für jedes $u < a$ giebt es zwey gleiche entgegengesetzte y; was auch a und b für eine Verhältniß haben. Also zieht sich die krumme Linie von α mit zween gleichen und ähnlichen Schenkeln auf beyden Seiten von CA unten an BF hin. Sie sind $\alpha\mu$; $\alpha\lambda$; 21. Fig. $\alpha\delta C\mu$; $\alpha DC\lambda$; 22. Fig.

485. Zus. In 481. ist, $y = \left(\frac{b}{x}+1\right)$. $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Wenn nun x kleiner als a ist, und abnimmt, so nimmt $\frac{b}{x}$, auch a^2-x^2 zu; daher wächst y wenn x abnimmt, oder jedem kleinern positiven x gehört ein grössers y zu. Weil nun $\frac{b}{x}$ immer grösser wird, je kleiner x wird, und x kleiner als jede Grösse die sich ange-

geben

geben lässt werden oder bis auf nichts abnehmen kann, so kann $\frac{b}{x}$ und folglich y über alle Gränzen wachsen und man sagt, wie in Trigon. 4. Erkl. 4. Zus. für $x = o$ werde y unendlich, wie die Asymptote erfodert (478).

486. Zus. Wenn die Abscisse verneint ist, so muß (483) allemahl $u < a$ seyn; ist auch zugleich $u < b$, so ist $1 - \frac{b}{u}$ eine verneinte Grösse die immer eine grössere verneinte Grösse wird, jemehr u abnimmt, und eben so alle Gränzen übersteigt wie $\frac{b}{x}$ in 485; also wird auch $y = o$ wenn die verneinte Abscisse $= o$ wird.

487. Zus. Die obern Schenkel AM, AL; und die untern (484) ziehen sich alle an BF so hin daß sie für grössere y ihr immer näher und näher kommen, und so nahe kommen als man nur will, wenn man y über alle Gränzen wachsen lässt. Dieses drückt man so aus: Die Schenkel erreichen BF als ihrer aller Asymptote wenn y unendlich wird.

488. Zus. Ein dritter Fall zu 482. 483. ist wenn $b = a$; also in 481. $y = \frac{(a \pm x).\sqrt{(aa - xx)}}{x}$.

Des Knotens Länge $C\alpha = a - b$ (22. Fig.) wird hier $= o$; oder die Puncte α, C, 22. Fig. gehen in einen αC 23. Fig. Es ist nähmlich

jetzo

setzo $y = 0$; 1) für $x = -a$ wegen des Factors $a + x$; 2) für $x = \pm a$ wegen des Factors $\sqrt{(aa - xx)}$ also zweymahl für $x = -a$; daß in der 23. Fig. das Ende der Linie $x = -a$; zweene Puncte α und C vorstellt. In der 22. F. gehn die beyden Schenkel $\alpha\delta C\mu$; $\alpha DC\lambda$ jener nach F, dieser nach B zu beyde durch C; in der 23. F. aber gehen die Bogen $\alpha\delta C$; αDC; der 22. Fig. in einen Punct zusammen der α und C zugleich ist.

489. Zus. Eine Linie $G\gamma Kk$ 22. Fig. die mit $A\alpha$ parallel und näher gezogen wird, als die Hälfte von $D\delta$ des Knotens grösster Breite beträgt, schneidet die krumme Linie in vier Puncten G; γ; K, k; Es gibt nähmlich für dieser Linie Abstand $Ee = y$; vier Werthe von x; nähmlich eG; eγ; eK; ek; vermöge der Gleichung (479). Für grössere y als $\frac{1}{2} D\delta$, müssen also von den vier Werthen, die x für jedes y haben sollte zweene unmöglich werden, und nur zweene möglich bleiben, wie die beyden RM; $R\mu$ für $x = ER$ 22. Fig. In der 21. Figur müssen allezeit zweene Werthe von x für jeden Werth von y unmöglich seyn; und eben so in der 23. Fig. den Fall $y = o$ ausgenommen; da es vier mögliche Werthe geben muß; einen $x = a$; und drey $x = -a$. Nähmlich in der 22. Fig. gibt es für $y = o$ auch vier mögliche Werthe $x = a$; $x = -a$; und zweene jeden $x = -b$; weil in der 22. Fig. in dem Puncte C einmahl $+ y = o$; und denn $- y = o$ wird,

oder

oder $x = -b$ einmahl als die Abscisse des Endpunctes vom Bogen $\alpha\delta C$; und denn als die des Endpunctes vom Bogen αDC betrachtet wird. Daher ist EC in der 22. Fig. als ein doppeltes x und $EC = Ea$ in der 23. Fig. als ein dreyfaches anzusehen, oder $AC\alpha$ schneidet die krumme Linie in beyden Figuren viermahl; in der 22. Fig. in A, in C zweymahl (nähmlich den Schenkel $\alpha\delta C\beta F$ und den Schenkel $\alpha D\lambda B\beta$) und in α; der Punct, durch den zweene Schenkel der krummen Linie gehen wird als ein doppelter angesehen. In der 23. Fig. kömmt zu dem doppelten Durchschnitte in C auch der in α, daß also da für $x = -a$ drey Durchschnitte geschehen, und es befindet sich da ein dreyfacher Punct. Diese Schlüsse gibt die Betrachtung der Figur, und aus der Betrachtung der Gleichung läßt sich eben das leicht darthun: Wenn $y^2 = o$ so ist aus (479) $\frac{(b+x)^2 . (aa-xx)^2}{xx} = o$. Weil nun x nicht ohne Ende wachsen darf (481) so kann man nicht darauf fallen, etwa dadurch daß x im Divisor unendlich gesetzt würde den Quotienten verschwindend zu machen, welches auch deßwegen nicht angeht, weil mit x auch der Dividendus wächst und also gegen den Divisor nicht verschwindet. Also muß der Dividendus $= o$ seyn. Das kann nur bey folgenden drey Werthen von x geschehen: $x = -b; = a; = -a$; Soll nähmlich der Dividendus als eine Gleichung

chung betrachtet werden, so entsteht er aus folgenden Wurzelgleichungen $(x-b).(x-b).(x+a).(x-a)$ und die biquadratische Gleichung, die herauskömmt, hat vier Wurzeln, zwo jede $=b$; eine $=+a$; eine $=-a$; den beyden ersten gehören im 2. und 3. Falle mögliche Ordinaten zu; oder es gibt für sie Puncte der krummen Linie (482. 489) aber nicht im ersten Falle (482) daher ist im 1. Falle C kein Durchschnitt der Linie $A\alpha C$ mit der krummen Linie.

Cramer; Introd. à l'Analyse des lignes courbes algebriques art. 174. Ex. IV. p. 449. hat sich hier geirrt, indem er den Punct C 21. Fig. als einen einzelnen zur Conchoide gehörigen Punct, (punctum coniugatum) ansieht. Es giebt dergleichen Puncte bey krummen Linien, die mit dem übrigen Zuge der krummen Linie nirgends zusammen hangen und doch vermöge der Gleichung dazu gehören; aber C 21. Fig. ist nicht von der Art, denn α ist der Punct der Conchoide der am weitesten unter der Asymptote liegt (481). Cramer ist dadurch verleitet worden, daß er geglaubt, für $x=-b$ werde allemahl $y=0$: Aber wenn $x^2 > a^2$; wird $b+x=0$, in etwas Unmögliches multiplicirt, und kann daher doch ein unmögliches Product geben; oder $\frac{y}{b+x}$ ist für $x^2 > a^2$ allemahl unmöglich, also auch in 482. für $x=-b$.

490.

490. Zus. Wenn $b = o$ so fällt C in BF und alsdenn wird die krumme Linie ein Kreis vom Halbmesser $= a$; und BF sein Durchmesser; denn daß BF eine Asymptote war, setzte zum voraus, C liege auser BF (478). In diesem Falle wird nähmlich in (479) $\frac{y = x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$

$= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ wie sich für den Kreis gebühret.

491. Erkl. I. Zu jeder Abscisse x; gehört eine oder mehrere Ordinaten y. Im ersten Falle hat die krumme Linie nur einen Schenkel im andern mehrere. Man sehe nähmlich x als eine gegebene Grösse an, so wird y die Wurzel einer bestimmten Gleichung, und so viel es solche Wurzeln giebt, so viel giebt es unterschiedene Ausdrückungen für y, durch x und die beständigen Grössen. In jeder solchen Ausdrückung setze man x nun wieder veränderlich, so giebt sie die Reihe von y die einem gewissen Schenkel zugehören (wie 327.).

So geben die beyden Werthe mit entgegengesetzten Zeichen (351) die beyden Schenkel der Parabel auf beyden Seiten der Axe.

II. Zuweilen nennt man auch unterschiedene Schenkel, die nach (I) einerley wären, nur daß für den einen x bejaht, für den andern verneint genommen wird.

So giebt in (402) $y = \pm c\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)}$

nur zweene Schenkel der Hyperbel, einen für das obere,

obere, den andern für das untere Zeichen. Den ersten machte zusammen AMμ und BR 14. Fig. aus. Man pflegt aber beyde als unterschiedene anzusehen da dem letztern $-u$ wie dem ersten $+u$ zugehört.

III. Nachdem man also eine Gleichung oder die andere für eine krumme Linie annimmt, nachdem können Puncte der krummen Linie zu einem oder zu mehrern Schenkeln gerechnet werden.

Die Gleichung (412) gäbe nach (I) nur einen Schenkel der Hyperbel, oder nach II. nur zweene; μMAm für das bejahte p, und RBS für das verneinte.

IV. Man zählt also oft die Schenkel wie die Rechnung sie giebt, anders als wie die Figur sie anzeigt. Wie man sie aber nach der letzten Art zählen sollte, da man etwa jeden Schenkel von einem gewissen merkwürdigen Puncte (wie die vier Schenkel der Hyperbel von ihren Scheiteln an) rechnete, davon lässt sich überhaupt nichts bestimmen, zumahl bey krummen Linien die nicht durch Durchmesser in ähnliche Theile getheilt werden. Es lässt sich auch immer eine Gleichung für die krumme Linie angeben, die die Schenkel eben so zählt wie man sie nach der Figur absondert, davon bey II. ein Exempel ist.

Man brauche in der Gleichung für die Conchoide (481. 483) die Wurzelgrösse mit dem Zeichen $+$; so ist die Ordinate, für eine bejahte Abscisse in (481) allemahl bejaht, und indem

x von

x von a bis o abnimmt; entsteht der Schenkel MGA 22. Fig. Nimmt nun wieder eine verneinte Abscisse von o bis — b zu, das ist wächst in 483. u von o bis b, so ist $1 - \frac{b}{u}$ so lange verneint und nimmt von verneinten unendlichen bis o ab, aber $\sqrt{(a^2 - u^2)}$ wird noch wie vorhin bejaht gesetzt; also ist y verneint und das giebt den Bogen λC; Nimmt noch ferner u von b bis a zu, so wird $1 - \frac{b}{u}$ also auch y bejaht, und das giebt den Bogen CDα; also giebt die Wurzelgrösse mit dem Zeichen +, für verneinte Abscissen den Schenkel λCDα und mit dem Zeichen — den Schenkel μCδα eben wie solche in 484. angegeben worden.

V. Wenn von den Wurzeln (I) einige unmögliche sind, so hat die krumme Linie nur so viel Schenkel für jede Abscisse, so viel für diese Abscisse Wurzeln möglich sind.

So hat die 20. Fig. (474) nur einen Schenkel für bejahte und nach (II) einen für verneinte Abscissen. Die übrigen beyden, kann man als unmöglich ansehen.

VI. Die Betrachtung der Schenkel kömmt besonders vor, wenn sie sich ins Unendliche erstrecken, an Asymptoten hinziehen u. s. w.

492. Aufg. Die krumme Linie 16. Fig. sey von der Ordnung n; Man fragt, in

wieviel Puncten aufs höchste sie von einer gegebenen geraden Linie geschnitten werden kann.

Aufl. PMN sey die gegebene gerade Linie; Man stelle sich eine Reihe Ordinaten vor, die mit ihr parallel gehen, und suche die Gleichung der krummen Linie für dieselben, und die Abscissen AP auf einer willkührlichen Abscissenlinie. In dieser Gleichung kann vermöge der Voraussetzung keine höhere Potenz von y als n enthalten seyn. Also kann die Abscisse AP nicht mehr als n Ordinaten haben; folglich keine gerade Linie die krumme in mehr als n Puncten schneiden.

493. Zus. In einer Gleichung vom Grade n kann eine von beyden Coordinaten auf weniger Abmessungen steigen, wie (472) ja vielleicht keine im höchsten Grade in ihr seyn (467. 412). Also schneidet nicht jede gerade Linie die krumme in n Puncten, sondern n ist nur die grösste Menge von Puncten, in denen die krumme von der geraden geschnitten werden kann. Von dieser grösten Menge können Durchschnitte unmöglich werden (490), oder sich unendlich entfernen (455); oder in einen Punct zusammengehen (452. 490). Das letztere gibt vielfache Puncte (puncta multiplicia) (489. 490) da nähmlich ein Punct zugleich zu verschiedenen Schenkeln einer krummen Linie gehört.

494. Anm. Man kann zeigen, daß zwo Linien, eine von der Ordnung m; die andere von der

der Ordnung n; einander in nicht mehr als in m. n Puncten schneiden können. Cramer §. 46. Euler Mem. de l'Ac. de Prusse 1748. p. 234. Man setze, ihre Gleichungen seyn auf eine gemeinschaftliche Abscissenlinie AR 24. Fig. und einerley Coordinatenwinkel gebracht, da PM der einen Ordinate, und PN der andern ihre ist. Im Durchschnitte O haben sie alsdenn eine Abscisse AQ; und Ordinate OQ. Schafft man also aus ihren Gleichungen die Ordinate weg, und macht eine bestimmte, die nur die Abscisse enthält (199), so steigt die Abscisse in ihr auf soviel Abmessungen soviel Durchschnitte es geben kann. So schneiden zwo Linien der zweyten Ordnung einander nur in 4 Puncten, wie aus 201. mit 419. verglichen erhellt; womit 429. übereinstimmt.

495. Aufg. **Die Zahl von Puncten zu finden, die eine Linie von der Ordnung n bestimmen; wie die von der zweyten durch fünf Puncte bestimmt wird (427).**

Aufl. Ihre allgemeine Gleichung enthält

I) alle Potenzen von y von der nten an bis auf 0;

II) x mit allen Potenzen von y, von der n — 1 an bis auf 0 multiplicirt.

III) xx mit allen Potenzen von y von der n — 2 an bis auf 0 multiplicirt.

IV) Und überhaupt x^m mit allen Potenzen von y; von n — m an bis auf 0 multiplicirt; da m alle Werthe von 0 bis n haben kann.

V) Also kommen in die Gleichung wegen n;

I; $n+1$ Glieder

II; n

III; $n-1$.

Für diese drey Sätze war m =; 0; 1; 2; läßt man also m (IV) die folgenden gröſsern Werthe bekommen, so giebt

	m = 3;	4;	5; ... n
Glieder;	$n-2$;	$n-3$;	$n-4$; .. 1

Die Menge aller Glieder zusammen ist also die Summe der absteigenden arithmetischen Reihe, deren erstes Glied $n+1$, der Unterschied -1; das letzte 1 ist, oder der aufsteigenden, deren erstes Glied 1; der Unterschied 1; das letzte $n+1$ ist. Sie ist also $\frac{(n+2).(n+1)}{2}$ (86).

Nun kann allemahl ein Glied in der Gleichung, 1 zum Coefficienten haben (192. III), also giebt es nur noch $\frac{(n+2).(n+1)}{2} - 1$ oder $\frac{(n+3).n}{2}$ Coefficienten zu bestimmen, welches die Zahl der Puncte ist, durch die eine solche Linie bestimmt wird.

Für $n=2$ kömmt $\frac{4.3}{2} - 1 = 5$; für n $= 3$; $\frac{6.3}{2} = 9$ oder eine Linie der dritten Ordnung wird durch 9 Puncte bestimmt.

496. Anm. Dieſes mit 494. verglichen, giebt einige ſcheinbare Wiederſprüche, welche man vom Cramer §. 47. 48. und vom Euler Mem. de l'Ac. de Pr. 1748. p. 219. gehoben findet.

Von den geometriſchen Oertern.

497. Erkl. Wenn die Gleichung für eine unbeſtimmte Aufgabe (179) nur zwo unbekannte Gröſſen enthält; ſo heiſſt die Linie, welcher ſie zukömmt (335) der Aufgabe geometriſcher Ort (locus).

So iſt die Ellipſe, deren Brennpunkte F; f; ſind, die Axe = a iſt, der Ort der Aufgabe (475).

498. Anm. Dieſe Benennung iſt von den Alten bey ihrer geometriſchen Analyſis gebraucht worden. Sie haben auch die gerade Linie und den Kreis loca plana; die Linien der zweyten Ordnung, den Kreis ausgenommen, loca ſolida genannt, weil ſie ſolche betrachteten, wie ſie aus dem Schnitte des Kegels als eines Körpers entſtunden. Von den übrigen Linien war ihre Kenntniß ſehr eingeſchränkt und unvollkommen, ſie nannten ſolche loca linearia. Pappus Collection. Math. Lib. IV. ante Prop. 31.

499. Zuſ. Wenn man aus zwo Gleichungen, H; K; die x; y; enthalten, eine V macht, die nur x enthält (199), und alſo den Durchſchnitt O; 24. Fig. der beyden Oerter BN; CM; ſucht (494) ſo iſt die gemeinſchaftliche Abſciſſe AO

die Wurzel der Gleichung V; oder es ist auch die gemeinschaftliche Ordinate OQ diese Wurzel, wenn man die Abscisse aus der dritten Gleichung weggeschafft hätte. Wenn man also die beyden Oerter BN; CM beschreibt, so geben ihre Durchschnitte die Wurzeln der bestimmten Gleichung. Sind unter diesen Wurzeln unmögliche, so wird es nicht soviel Durchschnitte geben, soviel Abmessungen V hat.

Von der Construction der Gleichungen.

500. Erkl. Eine bestimmte Gleichung verzeichnen (construere) heißt, durch Zeichnung Linien finden, welche ihre Wurzeln vorstellen. Es wird zum voraus gesetzt, daß alle gegebenen Größen in geraden Linien gegeben sind.

501. Zus. Wenn für eine Gleichung des ersten Grades $y = \frac{a \cdot b}{c} + d$ so sucht man zu c; b; a; die vierte Proportionallinie e da denn $y = e + d$.

502. Zus. Für eine Gleichung des zweyten Grades $xx = ax + bc$ ist die Wurzel $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + bc)}$. Man setze also eine Linie, deren Quadrat $= bc$ ist, mit $\frac{1}{2}a$ rechtwinklicht zusammen. Die Hypotenuse des Dreyecks, das solchergestalt entsteht, ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + bc)} = f$ und $y = \frac{1}{2}a \pm f$. Man begreift leicht, wie man sich zu verhalten hat, wenn a oder bc verneint sind. Meine Absicht ist blos auf eine kurze und

leichte

leichte Art die Construction dieser Gleichungen allgemein zu zeigen. Bey verschiedenen Schriftstellern findet man andere. Siehe Hausen El. Geom. Pr. 53. 54. Euler: Introd. in Analys. inf. L. II. §. 489.

503. Aufg. **Die Durchschnitte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Parabel zu finden.**

Aufl. Der Parabel AM; 25. Fig. Axe sey AE; der Parameter = a; des Kreises Mittelpunct sey G; sein Halbmesser GM = r; das Perpendikel GE = c; AE = b; GK mit der Axe parallel. So ist wegen des Kreises; $KM^2 + KG^2 = GM^2$: Aber KM = PM − PK; KG = AE − AP = AE − PM^2: a; wegen der Parabel; also $(PM - PK)^2 + (AE - PM^2 : a)^2 = GM^2$ oder $(y - c)^2 + (b - yy : a)^2 = rr$; diese Gleichung wird (P)

$$y^4 + aayy - 2aacy + a.\begin{cases} +bb \\ +cc \\ -rr \end{cases} = o \quad -2ab$$

504. Zus. Wenn der Kreis die Parabel im Scheitel A schneiden soll; so ist rr = bb + cc und das letzte Glied, wird = o; folglich auch ein Werth von y (225) wie sich gebühret. Die übrigen drey sind also in folgender Gleichung enthalten (Q)

$$y^3 + aay - 2aac = o \quad -2ab$$

505. Aufg. Eine cubische Gleichung, deren zweytes Glied fehlt,

$$z^3 + \pi z + \varrho = 0 \quad (R)$$

durch den Kreis und die Parabel zu construiren.

Aufl. I. Man setze die z in R; sollen mit den y in Q; einerley seyn; so ist $aa - 2ab = \pi$; $\varrho = -2aac$; Man hat also zwo Gleichungen, drey unbekannte Grössen a; b; c; zu bestimmen. Folglich kann man eine von diesen dreyen nach Gefallen annehmen. Es ist am bequemsten, a dazu zu wählen, denn so kann man einerley einmahl gezeichnete Parabel zu allen cubischen Gleichungen brauchen. Also ist

$$b = \tfrac{1}{2}a - \frac{\pi}{2a}; \quad c = -\frac{\varrho}{2aa};$$

II. Sind nun die Coefficienten π; ϱ; durch Linien gegeben, so muß wegen der Gleichheit der Abmessungen, π zwo Abmessungen und ϱ drey haben. Man kann also, da a auch eine Linie ist, setzen, $\pi = ap$; $\varrho = aaq$ wo p; q; Linien seyn werden, die durch a und π; ϱ; gegeben sind. Also ist $b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; $c = -\frac{1}{2}q$ oder es sind die beyden Linien AE; EG; folglich der Mittelpunct G gegeben, daraus ein Kreis mit dem Halbmesser GA (504) beschrieben, die Parabel noch in drey Puncten schneidet, deren Ordinaten MP; die Linien z in der Gleichung R sind.

III.

III. Exempel. Man soll zwischen zwo gegebenen Linien e; f, zwo mittlere Proportionallinien finden. Die erste unter ihnen heisse z; so heissen die vier Linien nach einander e; z; $\frac{z^2}{e}$; $\frac{z^3}{e^2}$; die letzte aber ist = f; also $z^3 - e^2 f = 0$; (R) oder $\pi = 0$; $p = 0$; $\varrho = -eef$ daher $q = -\frac{ee}{aa} f$; also AE oder $b = \frac{1}{2} q$; EG oder $c = +\frac{ee}{2aa} f$. Der Kreis kann die Parabel auser dem Puncte A, nur noch einmahl schneiden, weil in der Gleichung R nur ein z möglich ist (237), und die Ordinate dieses Durchschnittes ist die gesuchte erste unter den mittlern Proportionallinien, daraus man die zweyte leicht findet.

IV. Sind aber π; ϱ; Zahlen, so nehme man a für die Einheit an, da denn $p = \pi$; $q = \varrho$ wird, oder man nimmt für p; q; Linien, die sich zu a verhalten, wie die Zahlen π; ϱ; zur Einheit. Die Ordinaten werden, a zur Einheit gebraucht, die Wurzeln vorstellen, die man also in Zahlen ausdruckt, wenn man a wie z. E. einen verjüngten Maaßstab, in 1000 Theile eintheilet.

V. Ex. $z^3 - 41z - 30 = 0$; Man beschreibe eine Parabel mit einem willkührlichen

Parameter $a = 1$; und setze $p = -41$; $q = -30$; also b oder $AE = \frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}$ und c oder $EG = +15$; der Kreis aus G mit GA beschrieben, wird die Parabel in drey Puncten schneiden, des einen Ordinate wird $= 6$ d. i. sechsmahl so groß als der Parameter seyn. Die andern sind Irrationalzahlen, oder sie haben zum Parameter eine Irrationalverhältniß.

VI. Wegen der Lage der Linien ist zu bemerken, daß man in der Rechnung angenommen hat, die bejahten Linien fallen über die Axe, und vom Scheitel hineinwärts: Die verneinten bekommen also die entgegengesetzte Lage. Wäre z. E. $z^3 + 6z + 20 = 0$ also $p = +6$; $q = +20$; so wäre $b = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ und $c = -10$. Also müsste man $AE = \frac{5}{2}$ linker Hand des Scheitels nehmen, und dadurch $EG = 10$ unter die Axe hinunter setzen.

506. Aufg. **Eine biquadratische Gleichung, deren zweytes Glied fehlt**

$$z^4 + \pi z^2 + \varrho z + \sigma = 0 \quad (S)$$

zu construiren.

Aufl. Man macht S mit P (503) vergleichen, eben die vorigen Gleichungen, und findet also b; c; wie vorhin (505). Nun kömmt noch $\sigma = aa\,(bb + cc - rr)$ oder $rr = bb + cc - \sigma : aa$, welches den Halbmesser bestimmt.

Wenn σ in der Gleichung eine verneinte Grösse bedeutet, so ist dieser Ausdruck des Halbmessers allemahl möglich, und kann also da jede Para-

Parabel wie (505) gebraucht werden. Iſt aber σ in der Gleichung bejaht, ſo kann dieſer Ausdruck für den Halbmeſſer was Unmögliches geben. Alsdenn ſetze man rr = bb und cc = σ : aa; Aus der letzten Gleichung findet ſich (505) a = ϱ : 2√σ; welches möglich iſt, weil σ bejaht iſt, dieſen Parameter der Parabel muß man alſo gebrauchen. Er giebt b = r = (ϱϱ ⇾ 4πσ) : 4ϱ√σ und c = 2σ : ϱ.

507. Anm. I. Dieſe Conſtruction der cubiſchen und biquadratiſchen Gleichungen iſt vom Carteſius Geom. L. III. zuerſt gelehret worden. Nach dieſem haben ſich verſchiedene ſehr damit beſchäfftiget; als Baker in claue Geom. catholica; Halley in Aufſätzen de conſtructione aequationum, die man aus den philoſ. Transact. bey Graveſands Ausgabe von Newt. Ar. vniu. p. 274. findet; u. a. m.

II. Weil ein Kreis auch die Ellipſe und die Hyperbel in vier Puncten ſchneidet, und weil zwo Linien der zweyten Ordnung einander in vier Puncten ſchneiden (494), ſo lieſſen ſich vermittelſt dieſer krummen Linien eben ſolche Conſtructionen angeben; S. Schoten Comm. in Geom. Cart. L. III. p. 325. Man hat die Conſtruction durch die Parabel für einfacher erkläret, weil der Parabel Gleichung einfacher iſt. Aber Newton Ar. vniu. p. 232. hat hierüber ſehr gegründete Erinnerungen gemacht. Die Abſicht der Conſtruction iſt, das Geſuchte durch Zeichnung zu finden;

finden: Also ist für sie, die Linie am einfachsten, die sich am leichtesten verzeichnen lässt, ihre Gleichung mag aussehen wie sie will. Weil eine gerade Linie die Parabel in zween Puncten schneidet, so könnte man die quadratischen Gleichungen, die zwo Wurzeln haben, durch die Parabel und die gerade Linie construiren, und man sollte sie zu dieser Absicht dem Kreise vorziehen, wenn die Construction einfacher hiesse, deren Linie die einfachere Gleichung hat. So ungereimt dieses wäre, so offenbahr erhellt daraus, daß man die Construction nicht für einfacher zu halten hat, die eine Linie von einer einfachern Gleichung braucht. Dieserwegen hat Newton Ar. vniu. p. 215. verschiedene Constructionen durch andere Linien, die sich leichter beschreiben lassen, gelehret.

III. Ueberhaupt scheinen die Constructionen der höhern Gleichungen durch krumme Linien eben keinen grossen Nutzen zu haben. Diese Linien durch Puncte zu verzeichnen, wie 361; 379; 415, ist viel zu mühsam; es gibt auch nicht anders als durch unendliche Arbeit, d. i. nie, alle Puncte, und folglich ist man nicht sicher die Durchschnittspuncte, die man vornehmlich sucht, auf diese Art zu bekommen. Werkzeuge, welche andere krumme Linien mit einer stetigen Bewegung beschreiben, wie der Reißzirkel den Kreis, sind wohl ausgedacht worden, aber man hat sie bey weiten nicht so leicht, und ihr Gebrauch ist bey weiten nicht so bequem, und so zu

verlässig als der Gebrauch des Reißzirkels. Will man die Wurzeln einer Gleichung wirklich zu einem practischen Gebrauche wissen, so ist die Construction auch deßwegen unzulänglich, weil sie diese Wurzeln nicht in so kleinen Theilen der angenommenen Einheit gibt, als man will. Man wird den Parameter der angenommenen Parabel (505), schwerlich in tausend Theile, und gewiß nicht in mehrere theilen. Man hat also die Wurzeln nicht weiter als in Tausendtheilen, und durch eine Arbeit, die vielleicht mühsamer ist als die Rechnung (321), vermöge der man sie viel genauer finden könnte. Die Alten haben noch mehr Ursache gehabt, dergleichen durch Verzeichnungen zu suchen, weil ihnen die Kunstgriffe nicht so bekannt waren, durch welche wir jetzo Rechnungen leicht vollführen, die ihnen sehr schwer aussahen. Zu dergleichen Absicht haben Nicomedes und Diokles die Linien (477. 469.) gebraucht. Pappus; Coll. Matth. L. III. Prop. V. u. s. w.

508. Anm. Es sind unter den Alten vornehmlich ein paar hieher gehörige Aufgaben berühmt gewesen; Die Verdoppelung des Würfels (problema deliacum) und die Theilung eines Winkels in drey Theile. Wenn man z die Seite eines Würfels der noch einmahl so groß als der Würfel von g ist, finden soll, so heißt dieses die Gleichung $z^3 - 2g^3 = 0$ auflösen; d. i. zwischen g und 2g zwo mittlere Proportionallinien finden, wenn man in 505. III; $e = g$;

$f =$

$f = 2g$ ſetzt, und man hat daher die Frage unter beyderley Ausdrückungen vorgetragen. Weil ſich ähnliche Körper wie die Würfel von Linien, die an ihnen auf eine ähnliche Art gezogen ſind, verhalten (Geom. 65. S. Anm.), ſo kömmt man ebenfalls auf eine ſolche cubiſche Gleichung, wenn man einen Körper mit Beybehaltung der Aehnlichkeit nach einer gegebenen Verhältniß gröſſer oder kleiner machen will. Sollen ſich ein paar ähnliche Körper wie $e : f$ verhalten, und eine Linie in einer gegebenen Lage, z. E. die Länge, heiſſt bey einem k; bey dem andern z; ſo iſt $e : f = k^3 : z^3$ oder $z^3 = k^3 f : e$ woraus die Gleichung 505. III; wird, wenn man $k = e$ ſetzt. Daher iſt dieſe Aufgabe auch bey den Alten denen vorgefallen, die ſich mit dem Maſchinenweſen beſchäftigten. Papp. Coll. Math. L. VIII. Prop. XI. Hero Cteſibius; ſub fin. Belopoeecorum. Eutocius hat in ſ. Anmerk. über des Archimedes zweytes Buch von der Kugel und dem Cylinder, die Bemühungen der Alten zur Auflöſung dieſer Aufgabe geſammlet. Daß ſich der Würfel durch Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien verdoppeln laſſe, bemerkte nach ſeinem Berichte zuerſt Hippokrates aus Chios, der aus einem verunglückten Kaufmanne Mathematiker ward. Cramer, ſur Hippocrate de Chio; Mem. de l'Ac. de Pruſſe 1748.

505. Zuſ. Daß die Theilung eines Winkels in drey Theile auf eine cubiſche Gleichung führet, erhellt aus 175. Wenn man dorten des dreyfachen

fachen Winkels Sinus = k nennt; so ist $k = 3bb - a^3$. Nun setze man $1 - aa$ statt bb und sehe a als die gesuchte Grösse, k als die gegebene an, weil der ganze Winkel dreymahl so groß als sein Drittheil ist: So kömmt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}k = 0$.

510. Anm. Die drey Werthe von a in dieser Gleichung findet man so: u bedeute den kleinsten Bogen, dessen Sinus k ist; weil ein Sinus zu mehr Bögen gehöret (Trig. 2. Erkl. 8. Zus.), P bedeute den ganzen Umfang des Kreises; so bedeutet a; folgende drey Sinus: von $\frac{1}{3}u$; von $\frac{1}{3}.(u+P)$; von $\frac{1}{3}(u+\frac{1}{2}P)$. Die beyden ersten Werthe behalten die Zeichen die ihnen vermöge ihrer Bogen zukommen, der dritte bekömmt das entgegengesetzte. Meiner geometr. Abhandl. II. Samml. 24. Abh. 38. §.

511. Zus. Man kann also einen gegebenen Winkel überhaupt nicht anders in drey Theile theilen, als durch die Construction einer cubischen Gleichung. In dem besondern Falle des rechten Winkels ist $k = 1$; und die Gleichung heisst $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = 0$. Man weiß aber, daß der Werth von a den man eigentlich hier sucht = sin $30° = \frac{1}{2}$ (Trig. 2. Erkl.) ist. In der That ist auch $\frac{1}{8} - \frac{3}{4}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$. Ferner giebt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$ mit $a - \frac{1}{2}$ dividirt (226) die Gleichung $aa = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ deren Wurzeln $+\frac{1}{2}$; oder -1; nach (510) die Werthe der Sinusse für $\frac{1}{3}.(90+4.90)$ Gr. = 150 Gr. und $\frac{1}{3}.(90+2.90)$ Gr. = 90 Gr. sind.

512.

512. Anm. Verschiedene haben sich gemüht, wenn sie beyde Aufgaben (508) blos durch Kreis und gerade Linien aufzulösen gesucht haben; wovon man beym Pappus Coll. Math. L. III. sub in. und wegen der zweyten am Ende des vierten Buchs von Campani Euklides, Exempel findet. Von Campanis und Dürers Theilungen des Winkels in drey Theile s. meine geometrischen Abhandlungen, I. Samml. 33. 34. Abhandl. Ein Kreis kann eine gerade Linie nur in zween Puncten schneiden: Und also können seine Durchschnitte keine Wurzeln von höhern Gleichungen geben, als die quadratischen sind (499). Dieses ist die 173. versprochene Erläuterung.

513. Anm. Da man gegenwärtig durch die trigonometrischen Tafeln, bequem den Sinus des dritten Theiles jedes Winkels, dessen Sinus gegeben ist, finden kann; so haben die Neuern die Sache umgekehrt betrachtet; und die Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung wie die (505. I.) so zu finden getrachtet; daß sie selbige Gleichung mit der $a^3 - \frac{3}{4}r^2a + \frac{1}{4}kr^2 = 0$ (509) vergleichen, wo ich den Halbmesser nun r nenne. Wenn man nähmlich annimmt, a (509) soll das z (505) seyn, und folglich die Coefficienten, die zu einerley Potenzen von a und von z gehören, gleich setzt, so bekömmt man $r = 2\sqrt{-\frac{1}{3}\pi}$ (welches möglich ist, wenn π eine verneinte Grösse bedeutet;) und $k = -3\pi : \varrho$ durch die so gefundene Verhältniß k: r ist also ein Winkel u gegeben, und die Sinus von $\frac{1}{3}u$;

$\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}(u+P)$; $\frac{1}{3}(u+\frac{1}{2}P)$ werden die gesuchten Wurzeln seyn. Die vollständige Erklärung dieses Verfahrens wird mir hie zu weitläuftig und beruhet auf Gründen, die ich hier nicht erwiesen habe (510). Auch ist es desto entbehrlicher, da wir nach (331) die Wurzeln viel schärfer finden können. Man sehe davon Halleys (507) angef. Schrift pag. 291. Landen Mathematical Lucubrations Part. VI. Theor. II. Der letztere hat die cubische Gleichung so betrachtet, daß das zweyte Glied in ihr nicht fehlt, d. i. ohne den geringsten Nutzen die Rechnung ungemein viel beschwerlicher gemacht. Will. Wales P. II. art. 30. Phil. Transact. Vol. 71. for 1781.

Wie die Natur der Flächen, welche Körper begränzen, durch Gleichungen ausgedrückt wird.

514. Lehns. Wenn M (26. Fig.) einen Punct vorstellt, der sich über der Ebene des Papiers erhoben befindet; so fälle man von ihm auf die Ebene des Papiers das Loth MQ; (Geometr. 46. S. 3. Zus.) durch A einen willkührlich angenommenen Punct in der Ebene des Papiers; ziehe man in ihr eine willkührliche Linie, und fälle auf solche das Perpendikel QP; das auch in ihr liegen wird (Geometr. 2. Th. Grundsz.). Sind nun AP; PQ; QM; gegeben, so ist der Punct M gegeben.

515. Zus. Wenn mehr dergleichen Puncte M; in einer gegebenen krummen oder ebenen Fläche liegen; und wenn man in der Ebene des Papiers für alle eine gemeinschaftliche Linie AB gezogen hat, alsdenn aber für jeden die Perpendikel MQ; QP; zieht; so wird die Vergleichung zwischen AP; PQ; QM; durch die Natur der Fläche bestimmt werden, und für eine andere Fläche, bey eben der Linie AB; und eben dem Puncte A anders seyn.

516. Erkl. Wenn AP = x; PQ = y; QM = z; so heißt die Gleichung zwischen x; y; z; die Gleichung für die Fläche, in der sich M befindet. Die Ebene des Papiers mag die Grundfläche heißen.

517. Ex. Befände sich M in einer Ebene, die mit der Grundfläche gleichlaufend ginge; so wäre z unveränderlich, und würde also durch x; y; gar nicht bestimmt. Für sie wäre also die Gleichung z = b wo b die Weite beyder Ebenen bedeutet.

518. Ex. Befände sich M in einer Ebene, von welcher die Grundfläche in AB geschnitten würde, so wäre PQ: QM wie der Sinustotus zur Tangente von beyder Ebenen Neigungswinkel MPQ (Geom. 46. S. 6. Zus. und 2. Th. 2. Erkl.). Diese Verhältniß wäre also beständig, z. E. = 1: n oder die Gleichung hieße ny = z.

519.

519. Ex. Befände ſich M in einer Kugelfläche, deren Mittelpunct A, der Halbmeſſer AM = a wäre; ſo hätte man $AM^2 = MQ^2 + AQ^2 = MQ^2 + QP^2 + PA^2$ oder $a^2 = z^2 + y^2 + x^2$.

Von den Schnitten der Flächen.

520. Erkl. Wenn ſich eine Reihe von Puncten wie M 26. Fig. in einer Ebene, in einer geraden oder krummen Linie, in einem Orte (497) befindet, ſo heiſſt die Reihe der ihnen zugehörigen Puncte Q (514) eigentlich ihre orthographiſche Projection (S. Perſpect. 23.) oder hier überhaupt ihre Projection.

521. Aufg. Wenn die Ebene des Orts von M (520) die Grundfläche in CO ſchneidet (27. Fig.); aus der Gleichung für den Ort; die Gleichung für die Projection zu finden.

Aufl. C. ſey ein willkührlicher Anfang der Abſciſſen, CT; TM; ſeyn ſenkrechte Coordinaten für den Ort des Punctes M; ſo iſt MTQ der Neigungswinkel der Ebene des Ortes gegen die Grundfläche (wie 518.) alſo die Verhältniß TQ: TM gegeben; z. E. = 1: m; folglich TM = m. TQ; Man darf alſo in die Gleichung zwiſchen CT und TM; nur m. TQ ſtatt TM ſetzen, ſo hat man die zwiſchen CT und TQ.

Wenn MTQ = φ ſo iſt m = sec φ.

322. Zuſ. Umgekehrt, wäre die Gleichung zwiſchen CT und TQ gegeben, ſo dürfte man in ſie nur TM : m ſtatt TQ ſetzen, um die zwiſchen CT und TM zu finden.

523. Exempel des Zuſatzes. Es ſey $CT^2 + TQ^2 = rr$ einer beſtändigen Gröſſe; ſo iſt auch $CT^2 + \frac{TM^2}{mm} = rr$ oder $TM^2 = mmrr - mm.CT^2$; befindet ſich alſo Q in einem Kreiſe, deſſen Mittelpunct C; der Halbmeſſer r; ſo befindet ſich M in einer Ellipſe, deren Mittelpunct C; die groſſe Axe $= 2mr$ die kleine $= 2r$ (371).

524. Zuſ. Ein ſenkrechter Cylinder mit einer Ebene durchſchnitten gibt eine Ellipſe. Denn M in 523. kann jeden Punct in der Fläche eines ſolchen Cylinders bedeuten.

525. Zuſ. Wenn die Ebene des Ortes der Grundfläche parallel iſt, ſo iſt der Ort des Punctes Q, dem Orte des Punctes M gleich und ähnlich. Dieſe beyden Oerter ſind nähmlich hier gegenüberſtehende Grundflächen eines prismatiſchen Körpers (Geom. 53. S.).

526. Aufgabe. Die Gleichung für den Schnitt einer Fläche zu finden, der in der Weite h mit der Grundfläche parallel geſchiehe.

Aufl. Man ſetze $z = h$.

Bew.

Bew. In der Gleichung für die Fläche (516) konnten x, y, alle Coordinaten in der Grundfläche bedeuten, die jedem Puncte der Fläche zugehörten. In der Gleichung, wo $z = h$ ist, können sie nur die bedeuten, die den Puncten der Fläche zugehören, welche die Entfernung h von der Grundfläche haben: Aber diese Puncte liegen in der Ebene des Schnittes in eben der Figur, in welcher in der Grundfläche die ihnen zugehörigen Puncte Q liegen (525), also ist die Gleichung für sie, mit der Gleichung einerley, welche x und y für die ihnen zugehörigen Puncte Q geben, oder man kann sich in der Ebene des Schnittes für die Puncte M Coordinaten vorstellen, welche den Coordinaten TQ; TC für die Puncte Q gleich und parallel seyn, also eben die Gleichung geben werden.

527. Ex. Für die Kugel (519) ist $yy + xx = aa - hh$ oder der Schnitt ein Kreis, dessen Halbmesser $\sqrt{(aa - hh)}$ (wie Geom. 49. S.). Die Gleichung 519. bleibt eben dieselbe, was für eine Lage auch die Grundfläche durch der Kugel Mittelpunct hat; Man kann also die Ebene, welche die Kugel schneiden soll, legen wie man will, und ihr allemahl die Grundfläche parallel legen, daher gegenwärtiger Beweis allgemein ist.

528. Zus. Wenn in einer Gleichung für eine Fläche; die veränderliche Gröſſe z nicht enthalten ist, so sind alle Schnitte, die mit der Grundfläche parallel gehen, der Grundfläche gleich und ähn-

ähnlich. Eine solche Gleichung bestimmt prismatische oder cylindrische Körper.

Von Flächen, deren Gleichungen gleichartig sind.

529. Erkl. Eine Gleichung heisst **gleichartig** (homogenea) wenn die Abmessungen der veränderlichen Grössen in einem ihrer Glieder soviel zusammen, als in dem andern betragen.

530. Zus. Wenn die veränderlichen Grössen Linien sind, so müssen die Coefficienten nur Zahlen seyn; weil an sich alle Glieder der Gleichung, indem sie zusammen ein Ganzes ausmachen, oder sich aufheben sollen, gleichartig seyn müssen.

531. Zus. Zwey Glieder einer gleichartigen rationalen Gleichung, die nur zwo veränderliche Grössen enthält, lassen sich so vorstellen:

$$\pi x^{\varkappa-\lambda} y^{\lambda} + \varrho x^{\varkappa-\mu} y^{\mu}$$

wo die griechischen Buchstaben Zahlen bedeuten. Diesen Gliedern müssen alle ähnlich seyn: Soviel nähmlich in jedem Gliede der Exponent von x weniger als $\varkappa$ ist, so groß ist in eben dem Gliede der von y.

532. Lehrs. **Jede gleichartige rationale Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen, gehört für eine gerade Linie.**

Bew. Man setze $y = \vartheta x$ so wird aus der Gleichung eine bestimmte,

$\pi\vartheta\lambda$.

$$\pi\theta \cdot x^{\lambda} + \varrho \cdot \theta \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} = 0$$

da sich nähmlich alle Glieder mit x^{μ} dividiren lassen: Aus derselben lässt sich also die Zahl θ finden. Aber $y = \theta x$ ist eine Gleichung für eine gerade Linie (340).

533. Zus. Diese gerade Linie geht durch den Anfang der Abscissen.

534. Lehrs. Eine gleichartige Gleichung zwischen drey veränderlichen Grössen sieht so aus:

$$z^{\alpha} = \beta \cdot z^{\alpha-\delta} \cdot x^{\delta} + \gamma \cdot z^{\alpha-\varepsilon} \cdot y^{\varepsilon} + \theta \cdot x^{\alpha-\pi} y^{\pi} + \eta z^{\alpha-\varkappa-\lambda} \cdot x^{\varkappa} \cdot y^{\lambda}$$

; z ist eine Function von x und y von einer Abmessung.

Ich stelle nähmlich jede Gattung von Gliedern, die in der Gleichung seyn kann, durch ein solches Glied vor, das nach und nach durch Veränderung der Exponenten sie alle bedeuten kann: So kann das Glied, wo $\alpha - \delta$ der Exponent von z: und δ der von x ist; alle nach der Ordnung bedeuten, welche Producte aus Potenzen von z und x in einander, aber kein y enthalten; und wenn man $\delta = \alpha$ setzt, so kömmt das Glied heraus, das allein x enthält. So stellt das zweyte Glied, wenn man für ε; das dritte, wenn man für π; und das vierte, wenn man für $\varkappa$; λ; nach und nach andere Zahlen setzt, alle Glieder vor, die Producte aus z in y; oder y allein;

Producte aus x in y oder y allein, Producte aus z in x in y; oder eine von diesen drey Gröſſen allein enthalten, denn dieses letzte Glied könnte jedes der übrigen vorstellen, nachdem man $x = 0$; oder $\lambda = 0$; oder $x + \lambda = \alpha$ oder endlich x und λ jedes $= 0$ seßte.

535. Lehrs. Wenn die Natur einer Fläche durch eine gleichartige Gleichung (534) ausgedrückt wird, so wird diese Fläche von einer Ebene, die über QA auf der Grundfläche senkrecht steht, in einer geraden Linie MA geschnitten.

Beyw. Weil der Punct M in der Fläche ist, so ist $\odot) MQ = \eta . MQ^{\alpha} . PQ^{\alpha-x-\lambda} . AP^{\lambda} . AQ^{x}$. Ich brauche hier noch (534) der Gleichung leßtes Glied alle übrigen vorzustellen; ich sage nähmlich nichts weiter, als daß die Exponenten der drey veränderlichen Gröſſen in jedem Gliede einerley Summe zusammen ausmachen; Befindet sich nun der Punct M zugleich in einer senkrechten Ebene über AQ; so ist die Lage des Durchschnittes dieser Ebene mit der Grundfläche, oder der Linie AQ gegeben, folglich die Verhältniß AQ: AP; und die AQ: QP gegeben. Es sey erstlich $PQ = \mu . AP^{\lambda}$; so ist $MQ = \eta . MQ^{\alpha-\mu-\lambda} . AP^{\lambda+x}$ $\mathfrak{C}$) oder aus $\odot$ wird die gleichartige $\mathfrak{C}$ die nur MQ und AP enthält, weil man statt PQ überall $\mu . AP^{\lambda}$ seßen kann. Nun ist AQ =

$\sqrt{(AP^2 + PQ^2)} = AP.\sqrt{(1+\mu\mu)}$. Man kann also in C überall $AQ:\sqrt{(1+\mu\mu)}$ statt AP setzen, so verwandelt sie sich in die gleichartige

$$\mathfrak{d}\overset{\alpha}{MQ} = \eta.\overset{\alpha-\varkappa-\lambda}{MQ}\cdot\left(\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu\mu)}}\right)^{\lambda}\overset{\varkappa+\lambda}{AQ}$$

zwischen MQ und AQ; die also für eine gerade Linie durch A gehört (533). Alle Puncte der Fläche also, die sich zugleich in der senkrechten Ebene befinden, liegen in der geraden Linie AM.

536. Lehrs. **Eine gerade Linie von A nach einem willkührlichen Puncte der Fläche M; gezogen, liegt ganz in der Fläche, oder jeder Punct von ihr ist ein Punct der Fläche.**

Bew. Man kann sich für jedes M ein Loth MQ; und eine senkrechte Ebene über AQ vorstellen, deren Durchschnitt mit der Fläche die gerade Linie AM ist (535).

537. Zus. Weil der Durchschnitt zwoer Flächen, alle Puncte, die ihnen gemein sind, enthält, so gibt es in der Ebene AMQ keinen Punct der Fläche auser der Linie AM.

538. Lehrs. **Eine willkührlich gelegte Ebene, schneide die Fläche in der Figur MTS 28. Fig. Man stelle sich eine Ebene durch A mit jener parallel vor; μ sey ein Punct der Fläche auf eben der Seite der parallelen Ebene, auf welcher die Ebene**

MTS liegt, so wird Aμ den Umfang der Figur MTS irgendwo schneiden.

Bew. Man fälle von A auf die Ebene des Schnittes das Loth AG die Ebene μAG wird auf die Ebene MTS senkrecht seyn (S. 47. S.), folglich solche in GM schneiden daß AGM = R; weil nun jeder Punct der Linie Aμ in der Fläche ist (536), so muß der Punct von ihr, welcher zugleich in der Ebene MTS ist, in dieser Ebene Durchschnitt mit der Fläche; d. i. in dem Umfange der Figur MTS liegen.

539. Zus. Wenn eine gerade Linie, die beständig durch A geht, so geführet wird, daß sie zugleich beständig durch den Umfang der Figur MTS geht, so geht sie durch alle Puncte der Fläche, welche von A nach der Ebene MTS zu liegen; oder sie beschreibt das Stück der Fläche, das von A nach MTS zu liegt.

440. Anm. Wäre MTS ein Kreis so würde solchergestalt ein Kegel beschrieben (S. 61. S. 4. Zus.), daher man dieses eine **Kegelförmige Bewegung** (motum conicum) nennt.

541. Anm. Liegt μ in der parallelen Ebene, so rückt das ihm zugehörige M ins Unendliche hinaus. Fällt μ auf die entgegengesetzte Seite der parallelen Ebene; so trifft μA rückwärts verlängert in M; das letzte läßt sich durch die Erzeugung entgegengesetzter Kegel erläutern: Die Linie CB 31. Fig. indem sie immer durch den Punct C geht, so herumführen, daß sie den

Um-

Umfang des Kreises, der DB zum Halbmesser hat, durchläuft, heißt, zugleich das rückwärts verlängerte Stück CB dieser Linie so herumführen daß es den Umfang eines Kreises der Bd zum Halbmesser hat, durchläuft. Also wird nie ein Kegel ohne seinen entgegengesetzten beschrieben, beyde nähmlich gehen nach beyden Seiten ihres gemeinschaftlichen Scheitels ohne Ende aus einander.

542. Lehrs. Eine Ebene, welche mit der Ebene MTS parallel ist, schneide die Fläche in der Figur $\mu\tau\sigma$. Ich nehme an, daß μM; Tτ; Sσ; gerade Linien durch A sind (538), beyde Schnitte werden ähnlich seyn.

Bew. Die Ebenen beyder Schnitte, werden von der Ebene AMT in MT; $\mu\tau$; von der Ebene ATS in TS; $\tau\sigma$; geschnitten; so daß MT mit $\mu\tau$; TS mit $\tau\sigma$ parallel ist (Geom. 2. Th. 2. Erkl. Zus.). Also ist MTS $=\mu\tau\sigma$ (Geom. 46. S. 2. Zus.) ferner (Geom. 25. S.) AT: Aτ = TM: $\tau\mu$ = TS: $\tau\sigma$ oder die Dreyecke MTS; $\mu\tau\sigma$ ähnlich (Geom. 28. S.). Man nehme MT für eine Abscissenlinie des ersten Schnittes; $\mu\tau$ für die des zweyten an, und ziehe zu der ersten, Ordinaten SF in einem gegebenen Winkel, zu der zweyten Ordinaten $\sigma\Phi$ in einem gleichen Winkel Φ; so ist SFT $=\sigma\Phi\tau$; aber vorhin wegen der ähnlichen Dreyecke; T $=\tau$ also $\tau\sigma\Phi$ = TSF und (Geom. 26. S.) SF: $\sigma\Phi$ = ST:

$= ST : \sigma\tau = MT : \mu\tau$ wie vorhin erwieſen worden. Imgleichen $SF : \sigma\Phi = TF ; \tau\Phi$; alſo $MT ; \mu\tau = FT : \Phi\tau$ und $MT : \mu\tau = MF : \mu\Phi$ (Arithm. V. 34. II.) daher $MF : \mu\Phi = FS : \Phi\sigma$. Wenn man alſo in beyden Schnitten, die Puncte zuſammengehörige nennt, die in einer geraden Linie durch A liegen; und wenn man durch ein Paar willkührliche Puncte M; T in einem Schnitte, eine Abſciſſenlinie durch die mit ihnen zuſammengehörigen $\mu\tau$, eine Abſciſſenlinie im andern zieht, ferner die Abſciſſen in beyden Schnitten von den zuſammengehörigen Puncten M; μ; an rechnet, ſo verhalten ſich die Ordinaten zuſammengehöriger Puncte S; σ; wie ihre Abſciſſen; das heiſſt, die Figuren der Schnitte ſind einander ähnlich (387). Die Lagen der Puncte M; μ; werden nähmlich in einem Schnitte wie in dem andern, durch die Linie, die aus A durch beyde geht, beſtimmt; d. i. die Puncte M; μ; haben in beyden Schnitten eine ähnliche Lage (puncta ſunt ſimiliter poſita); und ſo verhält es ſich auch mit den Puncten T; τ; und alſo mit den Linien MT; $\mu\tau$; imgleichen mit den Puncten S; σ; oder zu jedem willkührlichen Puncte S in einem Schnitte, gehört einer σ im andern, ſo, daß S; σ; gegen die ähnlich liegenden Puncte M; μ; ähnliche Lagen haben. Jeder Punct in dem einen Schnitte wird alſo durch ſeine Lage gegen ein Paar gegebene Puncte deſſelben Schnittes eben ſo beſtimmt, wie der zu ihm gehörige Punct des andern Schnittes, durch ſeine Lage gegen die

Punc-

Puncte, welche in dem andern Schnitte jenen beyden zugehörten. Hieraus iſt begreiflich, daß beyde Figuren nur durch die Gröſſe, nicht durch die Lage ihrer Puncte unterſchieden ſeyn können; weil man zu jeden drey Puncten in einem Schnitte drey in den andern finden kann, die eben die Lage gegen einander haben, ein ähnliches Dreyeck beſtimmen; nur daß ſie näher beyſammen, oder weiter von einander ſind.

543. Anm. Der Beweis beruhet mit dem Geom. 61. S. auf einem Grunde, nur daß man hier den Begriff der Aehnlichkeit auf krumme Linien erweitert.

544. Zuſ. Das Loth AG (538) auf beyder Schnitte Ebene (Geom. 46. S. 10. Zuſ.), treffe in die Ebene $\mu\tau\sigma$ in γ; So iſt (S. 26. S.) $AG : A\gamma = GM : \gamma\mu = GT : \gamma\tau$ auch $MGT = \mu\gamma\tau$ (S. 46. S. 2. Zuſ.) daher (S. 28. S.) $MT : \mu\tau = MG : \mu\gamma = AG : A\gamma$; oder ein paar ähnlich liegende Linien in beyden Schnitten, verhalten ſich allemahl wie die Weiten der Ebenen der Schnitte von A.

Von runden Körpern.

545. Erkl. Man ſtelle ſich vor, die Linie CM 29. Fig. werde um ihre Axe AC ſo gedrehet wie ein Halbkreis, wenn er eine Kugel beſchreibet (Geom. 2. Th. 6. Erkl.), ſo beſchreibt jede Ordinate OM die auf die Axe ſenkrecht ſteht, einen Kreis, deſſen Halbmeſſer ſie iſt, und deſſen Ebe-

ne

ne auf die Axe senkrecht steht. Ein solcher Körper heißt ein runder Körper (corpus tornatum). Jeder Schnitt senkrecht auf die Axe ist ein Kreis dessen Mittelpunct in der Axe ist.

Anm. I. Dreht sich eine Ellipse um eine ihrer Axen; so beschreibt sie die Fläche eines Körpers, der rings herum begränzt ist; wird aber Parabel oder Hyperbel so gedreht, so erstreckt sich der Körper, wie diese krummen Linien ins Unendliche. In Absicht auf diese Erstreckung, stimmen also die beyden letzten Körper mit dem Kegel überein, der erste mit der Kugel.

Archimed hat Eigenschaften dieser Körper, besonders ihren Innhalt betreffend, in einem Buche von Sphäroiden und Konoiden untersucht, wo er sie durch angeführte Nahmen unterscheidet. In Sturms Uebersetzung ist der Titel: Von Kegel- und Kugel-ähnlichen Figuren. Afterkegel und Afterkugel, welche Wörter Sturm auch braucht, sind der deutschen Sprache nicht gemäß, denn, after übersetzt nicht *ides* sondern *post*, wie jeder einsieht der weiß was Afterdarm, Aftergeburt, bedeuten.

II. Dreht sich eine krumme Linie um eine Axe von der sie in ähnliche Hälften getheilt wird, so geht beym Umdrehen, die nachfolgende Hälfte durch eben die Stellen wo die vorhergehende schon gewesen ist, und beschreibt also keine andre Fläche. Wie, auser den schon gebrauchten Linien, wenn sich die Muschellinie 22. Fig. um die Axe Aa dreht.

III.

III. Drehte sich aber, eben diese Linie um die Axe BF, so beschriebe der Theil LAM, eine andre Fläche als der Theil $\lambda\alpha\mu$, und man müßte wohl was jeder Theil beschreibt einzeln betrachten.

IV. Das tritt also allemahl ein, wenn sich eine krumme Linie um eine Axe dreht, von der sie nicht in ähnliche Hälften getheilt wird.

546. Zus. Man setze die Axe AC durch A 26. Fig. senkrecht auf die Grundfläche, so ist Q in einem Kreise, dessen Mittelpunct A (525) also $xx + yy = AQ^2 = OM^2$ 29. Fig. Nun ist in der Figur MC 29. Fig. die Ordinate OM durch die Abscisse AO gegeben, oder eine Function von ihr: und AO ist hier $= z$; Also sey Z was für eine Function man will von z; so heißt die Gleichung für runde Körper $ZZ = xx + yy$.

547. Erstes Exemp. M 29. Fig. sey in einer geraden Linie durch A; also $Z = mz$; so ist nun $zz = xx + yy$ für einen senkrechten Kegel, dessen Axe durch A ginge. Sie ist gleichartig (536).

Anm. Hier liegen x, y, in der Ebene durch die Axe. Unten (550) wird eine Gleichung für den senkrechten Kegel gebraucht, da x und y in der Ebene liegen welche auf die Axe senkrecht steht, und da ist die Gleichung nicht gleichartig. Ich bemerke dieses nur, um einen Anstoß zu heben den man beym ersten Anblicke finden könnte. Daß für einen und denselben Körper die Gleichung

chung gleichartig oder ungleichartig seyn kann, nachdem man die Coordinaten nimmt, ist so wenig widersprechend, als es widersprechend ist, daß die Gleichung einer und derselben Hyperbel, beyder Coordinaten Quadrate, und einer ihre erste Potenz, oder nur beyder C. Quadrate, oder nur beyder C. Product enthält.

548. Zweytes Exemp. MC sey eine Ellipse (362), so ist ZZ oder $bz - \frac{b}{a}zz = xx + yy$ für ein elliptisches Sphäroid, $\frac{b}{a} = o$ (349) gibt $bz = xx + yy$ für das paraboliſche Konoid, und $-a$ statt a gesetzt (390) $bz + \frac{b}{a}zz = xx + yy$ für das hyperboliſche.

Von den Schnitten einer Fläche mit jeder gegebenen Ebene.

549. Aufg. **Wenn eine Fläche von einer Ebene geschnitten wird, die der Grundfläche nicht parallel ist (526), die Gestalt des Schnittes zu finden** 30. Fig.

Aufl. Ee sey der Durchschnitt der Grundfläche mit der schneidenden Ebene, und AE der Abscissenlinie AP senkrecht. ETX sey parallel mit der Abscissenlinie; $AE = f$; der Winkel $TES = \theta$; Aus Q ziehe man QS senkrecht auf ES

BS, ſo iſt die Neigung der ſchneidenden Ebene MSE; gegen die Grundfläche, der Winkel MSQ (Geometr. 46. S. 6. Zuſ.) der φ heiſſen mag. Des geſuchten Schnittes Coordinaten ſollen ES $= t$; SM $= v$ ſeyn. Man fälle von S auf EX und QP die Perpendikel ST; SV; ſo iſt QM oder $z = v. \sin\varphi$; QS $= v. \cos\varphi$; SQV $= R - QOX = SEQ$. alſo SV $= QS. \sin\theta = v. \cos\varphi. \sin\theta$; und QV $= SQ. \cos\theta = v. \cos\varphi. \cos\theta$. Auch ST $= VX = t. \sin\theta$; ET $= t. \cos\theta$; Alſo AP oder $x = t. \cos\theta + v. \cos\varphi. \sin\theta$ und PQ oder $y = v. \cos\varphi. \cos\theta - t. \sin\theta - f$. Dieſe Werthe von x; y; z; in die Gleichung für die Fläche geſetzt, geben eine Gleichung zwiſchen t; und v für den Schnitt.

550. Ex. Für einen ſenkrechten Kegel, 31. F. deſſen Höhe AC $= b$; der Halbmeſſer der Grundfläche AB $= r$; iſt 29. Fig. CO: OM oder (546) $b - z : Z = b : r$; alſo $Z = \frac{r.(b-z)}{b}$ und $rr.(b-z)^2 = bb.(xx + yy)$. Man ſchreibe der Kürze wegen m ſtatt r: b ſo iſt $mmzz - 2mmbz + rr = xx + y$. Dieſe Gleichung bleibt, weil der ſenkrechte Kegel ein runder Körper iſt, die Abſciſſenlinie AP 26. Fig. mag was ſie will für eine Lage haben. Man lege ſie alſo mit der Linie Ee 30. Fig. parallel, ſo iſt $\theta = 0$; Alſo $z = v. \sin\varphi$; $x = t$; $y = v. \cos\varphi - f$; dieſe Werthe in die Gleichung für den Kegel geſetzt, geben nach gehöriger Rechnung;

$$tt + (\cos\varphi^2 - mm.\sin\varphi^2).\ vv = o$$
$$\left.\begin{array}{l} -2.\cos\varphi.\ f \\ +2.\sin\varphi.\ mm.\ b \\ +ff - rr \end{array}\right\} v$$

Wenn man dieſe Gleichung gegen 419. hält, und das dortige x; y; hier t; v; gelten läſſt, ſo iſt $e = o$; $\zeta = 1$; $\delta = \cos\varphi^2 - mm.\sin\varphi^2$. Nachdem alſo hier $-\zeta\delta$; bejaht, verneint, oder $= o$ iſt, nachdem iſt der Schnitt eine Hyperbel, Ellipſe oder Parabel (465. II.) das iſt, nachdem $\cos\varphi^2$ kleiner, gröſſer, oder ſo groß als $m^2.\sin\varphi^2$ iſt, nachdem iſt der Schnitt eine Hyperbel, Ellipſe oder Parabel.

551. Zuſ. Dadurch daß man $\theta = o$ geſetzt hat man angenommen Ee 30. Fig. gehe mit der Abſciſſenlinie AP parallel (549). Es ſey alſo Ff 31. Fig. der Durchſchnitt der ſchneidenden Ebene mit des Kegels Grundfläche, ſo muß die Abſciſſenlinie für den Kegel, die Linie, welche in der 30. Fig. AP iſt, hier mit Ff parallel gehen, und folglich die Linie AE der 30. Fig. auf beyde ſenkrecht ſeyn. BDC ſey ein Durchſchnitt des Kegels durch ſeine Axe AC, und auf die nur erwähnte AE falle der Durchmeſſer der Grundfläche des Kegels DB; FE iſt auf die Ebene BDC ſenkrecht (Geom. 47. S. 3. Zuſ.) BDC werde von der Ebene des Schnittes in EG geſchnitten, ſo daß G in BC folglich in der Fläche des Kegels und in der ſchneidenden Ebene zugleich, alſo in dem Umfange des Schnittes iſt. So iſt FE auf

EG

EG senkrecht (Geom. 45. S.), also GEA die Neigung der Ebene des Schnittes gegen die Grundfläche des Kegels (S. 2. Th. 2. Erkl.) $= \varphi$.

552. Zus. $\cos\varphi^2 - mm \cdot \sin\varphi^2$ ist verneint, bejaht, oder Nichts, nachdem es sich mit $\frac{1}{mm} = \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2$ so verhält. Aber $\frac{1}{m} = \frac{b}{r} = \text{tang CBA}$, = der Tangente des Winkels, den jede Seite des Kegels mit der Grundfläche macht; den ich β nennen will; und $\sin\varphi : \cos\varphi = \text{tang}\,\varphi$. Also ist der Schnitt (551) eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, nachdem $\text{tang}\,\beta^2 - \text{tang}\,\varphi^2$ verneint, bejaht, oder Nichts ist.

553. Zus. Also ist für die Hyperbel tang $\beta <$ tang φ; wenn beyde bejaht angenommen werden. Da nun ABC ein spitziger Winkel ist (Geom. 9. S. 3. Zus.), so gibt es spitzige φ die gröſſer als β seyn können, das heiſſt, es gibt für tang φ positive Werthe (Trigon. 4. Erkl. 2. Zus.), wo tang $\varphi >$ tang β seyn kann. Diese bejahten Werthe für tang φ, wachsen mit φ bis $\varphi = R$; alsdenn kommen für stumpfe φ; abnehmende verneinte Werthe von tang φ. Jeder solcher verneinte Werth als verneint betrachtet, könnte nun zwar kleiner heiſſen als tang ABC (Ar. I. 95.) aber doch kann sein Quadrat, das bejaht ist, gröſſer seyn als das Quadrat von tang ABC;

So lange alſo der vermeinte Werth von tang φ noch ſo groß iſt, daß ſein Quadrat größer iſt als das Quadrat von tang ABC; ſo lange gibt der zugehörige ſtumpfe φ noch eine Hyperbel. Dieſes hört alſo auf, wenn die vermeinten Werthe von tang φ ſo weit abgenommen haben, daß ein Quadrat vom tang φ dem Quadrate vom tang ABC gleich wird, oder — tang φ = tang β worauf kleinere vermeinte Werthe von tang φ folgen. Folglich fällt für die Hyperbel E ſo daß DEG ein äuſerer Winkel des Dreyecks BEG iſt, damit DEG > ABC. Will man alſo durch G, einen willkührlichen Punct des Kegels, einen Schnitt führen, der eine Hyperbel geben ſoll, ſo führe man durch G und die Axe, die Ebene ABC; in AB nehme man nach Gefallen einen Punct E zunächſt bey B, damit GEA ein ſpitziger Winkel wird, der den ABC, ſo wenig als man will übertrifft, und ſetze auf AE in der Grundfläche das Perpendikel Ff, ſo iſt FGf die Ebene, welche die Hyperbel ſchneidet. Nun laſſe man ſich dieſe Ebene, um eine Axe, die durch den Punct G mit Ff parallel ginge, ſo drehen, daß ſie beſtändig auf der Ebene DCB ſenkrecht bleibt, ſo wird E immer weiter und weiter von B rücken, und es werden andere und andere Hyperbeln herauskommen, bis GE in die Lage Ge kömmt, daß — tang DeG = tang ABC, oder DeG = 2R — ABC oder (weil D = B) eG mit DC gleichlaufend iſt.

554.

554. Zuſ. Dieſer letztgenannte Schnitt gibt keine Hyperbel mehr. Für ihn iſt $\frac{1}{mm} = \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2$ (552) alſo gibt er die Parabel.

555. Läſſt man ſich nun die Ebene des Schnittes um ihre Axe (553) noch weiter drehen, daß der Punct E über e hinaus in ε rückt, ſo wird tang $\varphi <$ tang ARC; und die Schnitte geben Ellipſen.

556. Zuſ. Wenn man die ν auf EG; oder eG oder εG; vom E; e; ε; an genommen, als Abſciſſen anſieht, ſo gehören für den Schnitt zu jeder Abſciſſe zwey entgegengeſetzte, ſonſt gleiche, auf die Abſciſſen ſenkrechte t; (550) alſo iſt EG oder eG oder εG die Axe des Schnittes aber E nicht der Scheitel (389. 349. 362.).

557. Zuſ. Jede Linie Gγ begegnet der Fläche des Kegels unter C zweymahl in G; g; dieſes gibt die beyden Scheitel der Ellipſe (363). Die Parabel hat nur einen Scheitel (354), weil εG der Fläche des Kegels nicht weiter als in G begegnet. EG aber ſchneidet eG; und folglich auch DC, (Geometr. 12. S. 1. Zuſ.) in einem Puncte, der γ heiſſen mag; das gibt die beyden Scheitel der Hyperbel G; γ; (392) und die Ebene FGf ſchneidet in dem entgegengeſetzten Kegel Cβd (541) die entgegengeſetzte Hyperbel (404).

558. Zuſ. Durch einen Punct des Kegels G laſſen ſich unzählich viel Ellipſen und Hyperbeln aber nur eine Parabel ſchneiden. Die Ebene welche eine Parabel durch was für einen Punct G der Seite AB man will, ſchneiden ſoll macht mit der Grundfläche einen gegebenen Winkel, der nachdem man ihn ſtumpf oder ſpitzig nimmt der Neigung der Seiten des Kegels gegen die Grundfläche ABC Ergänzung zu 2R; oder dieſer Neigung ſelbſt gleich iſt; Ihr Durchſchnitt aber mit der Grundfläche, ſteht auf der gegebenen Ebene ABC ſenkrecht, alſo liegen alle dieſe Parabeln in parallelen Ebenen (Geom. 47. S. 7. Zuſ. mit der Ergänzung, die ich Gnomon. 21.* angezeigt habe), und ſind daher alle einander ähnlich (542), und weil man das Dreyeck ABC rings um die Axe AC drehen kann, ſo kann G jeden Punct des Kegels vorſtellen, und ſo ſind alle Parabeln, die ſich nur aus einem ſenkrechten Kegel ſchneiden laſſen, einander ähnlich; womit (388) übereinſtimmt. Die Hyperbeln und Ellipſen aber, die durch einen Punct G gehen, ſind unähnlich; jeder von ihnen aber laſſen ſich unzählige ähnliche parallel ſchneiden (542).

559. Zuſ. Wenn die Puncte F; f 31. Fig. im Umfange der Grundfläche ſind, ſo ſind in der Kegelfläche, und zugleich in der Ebene des Schnittes (551) alſo im Umfange des Schnittes, wofern der Umfang des Schnittes durch alle Puncte der Kegelfläche geht, die in ſeiner

Ebene

Ebene ſind. Nun iſt in dieſem Umfange auch G 551; der Schnitt wird alſo ſo ausſehen, wie die 32. Fig. zeigt. Der Punct E bedeute da die dreyerley Puncte E; e; ε; 31. Fig. Hier iſt ES = t; SM = v; und für v = 0; EF oder Ef = $\pm\sqrt{(rr-ff)}$. Dieſes iſt möglich, ſo lange E; e; ε; 31. Fig. innerhalb des Umfanges der Grundfläche liegt, und alſo f < r; daher allemahl für die Hyperbel und Parabel (553. 554.) aber für die Ellipſe (555) kann ε über der angenommenen Grundfläche des Kegels fallen, da denn dieſe Grundfläche zwar von der Ebene der Ellipſe, aber nicht von ihrem Umfange geſchnitten wird. Man begreift daß dieſes auf die Gröſſe von b; und den Winkel BCD ankömmt, man wird eine Fläche ſenkrecht auf die Axe des Kegels oder mit der angenommenen Grundfläche parallel, allemahl nahe genug bey C führen können, damit den Umfang jeder Ellipſe zu ſchneiden.

560. Zuſ. Um EG zu finden, ſetze man (550) r 0; dieſes giebt (78) r ſtatt m b geſetzt (550)

$$v = \frac{\cos\varphi\, f - \sin\varphi\, mr \pm P}{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 . mm}$$

wo P. P

$= (\cos\varphi . f - \sin\varphi . mr)^2 + (rr - ff).(\cos\varphi^2 - mm . \sin\varphi^2) = (\cos\varphi . r - \sin\varphi . mf)^2$.

Alſo iſt der Dividendus dieſes Werthes von v

I) $\cos\varphi . f - \sin\varphi . mr + \cos\varphi . r - \sin\varphi . mf$

$= (\cos\varphi - \sin\varphi . m).(f + r)$

und das untere Zeichen von P gebraucht, kömmt der Dividendus

II) $(\cos\varphi + \sin\varphi . m) . (f - r)$.

Nun ist der Divisor $= (\cos\varphi + \sin\varphi . m) . (\cos\varphi - \sin\varphi . m)$; also der Quotient

$$\text{I)} \quad \frac{f + r}{\cos\varphi + \sin\varphi . m}$$

$$\text{II)} \quad \frac{f - r}{\cos\varphi - \sin\varphi . m}$$

561. Zus. Der Divisor dieser beyden Werthe ist, das obere Zeichen für I. das untere für II. gebraucht $= \cos\varphi . \left(1 \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} . m\right) = \cos\varphi . (1 \pm \text{tang}\,\varphi . m) = \cos\varphi . (1 + \text{tang}\,\varphi . \cot\beta) = \cos\varphi . \cot\beta . \left(\frac{1}{\cot\beta} \pm \text{tang}\,\varphi\right) = \cos\varphi . \cot\beta . (\text{tang}\,\beta \pm \text{tang}\,\varphi)$.

562. Zus. Wie man bisher den Schnitt allemahl durch einen Punct G geführt; so führe man ihn nun allemahl durch eine gegebene Linie Ff; um die man sich die schneidende Ebene drehen lasse. So bleibt f unverändert allemahl kleiner als r aber φ ist anfangs für die Hyperbel spitzig, wird alsdenn für die Parabel $= 2R - \beta$ und für die Ellipse noch gröſſer. Die Axe, um welche man sich die schneidende Ebene (553) drehen lieſſe, war mit Ff parallel, und ein Schnitt

durch

durch G mit der Grundfläche parallel, gäbe einen Kreis, dessen Halbmesser sich zu seinem Abstande vom Scheitel verhielte wie r; k; brauchte man also diesen Kreis statt der Grundfläche; so geschähe in 553. das, was hier in der bisher angenommenen Grundfläche geschieht.

563. Zus. Für die Hyperbel ist (553) anfangs φ spitzig, also cos φ und tang φ bejaht, auch tang $\varphi >$ tang β; folglich der Divisor des zweyten Werths verneint, sein Dividendus auch, also der Werth II selbst bejaht. Nach diesem wird $\varphi = R$ also cos $\varphi = o$ aber tang $\varphi = \infty$; um zu sehen, was in diesem Falle der Divisor wird, behalte man für ihn den Ausdruck cos $\varphi \pm$ sin φ. m dieser wird hier offenbar $\pm m = \pm$ tang β; also ist der Divisor wiederum für den zweyten Werth verneint, und dieser Werth selbst bejaht. Wird aber φ stumpf, so ist cos φ verneint, aber tang φ eine grössere verneinte Grösse als tang β; daher tang $\beta +$ tang φ verneint, und dieses mit cos φ. cot β multiplicirt bejaht, also der Werth I. bejaht. Ferner tang $\beta -$ tang β bejaht, und dieses mit cos φ. cot β multiplicirt verneint, also der Werth II. bejaht. Für die Hyperbel sind also allemahl beyde Werthe bejaht. Ihre Scheitel G; γ; 31. Fig. liegen nähmlich allezeit beyde über F f.

564. Zus. Für die Parabel ist tang φ eine verneinte Grösse, die $= -$ tang β (553). Also ist für sie tang $\beta -$ tang $\varphi = +$ 2 tang β. und

der Divisor des zweyten Werthes ist 2. col φ; verneint; also der zweyte Werth bejaht; der erste aber hat zum Divisor col φ. cot β. (tang β — tang β) und ist also unendlich. Jener gibt daher den Scheitel der Parabel über EF, dieser zeigt an, daß der andere Scheitel unendlich weit hinausrücke. Dieß ist ein solcher Fall wie im Anfange von 541. erwähnt worden.

565. Zus. Für die Ellipse ist allemahl φ stumpf, aber tang φ eine verneinte Gröſſe, die kleiner als — tang β (555) also tang β + tang φ bejaht, welches mit col φ. cot β multiplicirt was verneintes gibt, also ist der Divisor des ersten Werthes, und der Werth selbst allemahl verneint; aber der Divisor des zweyten Werthes, ein Product aus der verneinten Gröſſe col φ. cot β in die bejahte tang β — tang φ daher verneint, und also der zweyte Werth bejaht. Die beyden Scheitel der Ellipse fallen nähmlich bey der Voraussetzung (562) auf entgegengesetzte Seiten der Linie Ff.

566. Zus. Man suche die Länge der Axe der Ellipse, oder die Entfernung ihrer Scheitel. Zu dieser Absicht muß man zu dem bejahten Werthe (564) das Entgegengesetzte des Verneinten rechnen. Dieser letztere Werth wird nur deßwegen verneint, weil er die Entfernung eines Scheitels auf der andern Seite von Ff bestimmt. Man findet also die Weite dieses Scheitels von dem andern, wenn man den Werth seiner Entfer-

fernung bejaht macht, und ſo zu dem bejahten Werthe der Entfernung des andern addirt. Folglich iſt die Weite der Scheitel der Ellipſe, oder die Länge ihrer Axe

$$\frac{f - r}{\text{cof}\,\varphi.\ \text{cot}\,\beta.\ (\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\varphi)} - \frac{(f + r)}{\text{cof}\,\varphi.\ \text{cot}\,\beta.\ (\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\varphi)}$$

Die Rechnung giebt dieſe Axe

$$\frac{2\,(f.\ \text{tang}\,\varphi - r.\ \text{tang}\,\beta)}{\text{cof}\,\varphi.\ \text{cot}\,\beta\ (\text{tang}\,\beta^2 - \text{tang}\,\varphi^2)}$$

Für die Axe der Hyperbel muß der Unterſchied der beyden Werthe genommen werden (563).

567. Zuſ. Es ſey EG der zweyte Werth (560) weil ſolcher allemahl bejaht iſt (563. 564. 565.); Man nehme EP = MS; und heiſſe GP = x; PM = y ſo iſt v = EG − x; t = y (559) und weil EG einer der Werthe von v in (560) iſt, ſo hat man (cof φ^2 − mm. ſin φ^2). EG^2 + (ſin φ. mr − cof φ. f). 2EG + ff − rr = 0; Seßt man nun in 550. EG − x ſtatt v; und t ſtatt y; und den zweyten Werth (560) ſtatt EG; ſo bekömmt man

$$yy = 2.\,(\text{cof}\,\varphi.\,r - \text{ſin}\,\varphi.\,mf).\,x - (\text{cof}\,\varphi^2 - mm.\ \text{ſin}\,\varphi^2).\,xx$$

Eine Gleichung wie eine von den dreyen 389. 362. 349. nach den drey verſchiedenen Fällen, die für den Coefficienten von xx können angenommen werden (550).

568.

568. Zuſ. Die drey erwähnten Gleichungen laſſen ſich ſo allgemein ausdrücken, $yy = Px + Qxx$ wo P der Parameter, und Q der Quotient des Parameters mit der Axe dividirt iſt. Für die Hyperbel iſt dieſer Quotient verneint, alſo hat die Axe da einen verneinten Werth (390). Folglich iſt hier der Parameter oder $P = 2.(\cos\varphi.r - \sin\varphi.m.f)$ und P: Q oder die Axe $= \frac{2.(\cos\varphi.r - \sin\varphi.mf)}{-(\cos\varphi^2 - mm.\sin\varphi^2)}$ woraus $\cot\beta$ ſtatt m; und $\tang\varphi$ ſtatt $\sin\varphi : \cos\varphi$ geſetzt, eben der vorige Ausdruck (566) folgt.

569. Anm. I. Die Weitläuftigkeit, in welche man ſchon bey dem ſenkrechten Kegel geräth, wird mich rechtfertigen, daß ich mich begnüge nur an demſelben zu zeigen, daß die Kegelſchnitte krumme Linien der zweyten Ordnung ſind. Dieſe Unterſuchung iſt wie alles von 514. an aus dem Anhange von Herrn Eulers Introd. in analyſ. infin. wo 69. u. f. §. die Schnitte des ſchiefen Kegels betrachtet werden, welches bey eben dem Verfahren, nur eine weitläuftigere Rechnung erfodert.

II. Die griechiſchen Geometern, betrachteten Anfangs auch nur Schnitte des gleichſeitigen Kegels. Sie ſetzten die ſchneidende Ebene, ſenkrecht auf das Dreyeck durch die Axe DCB, und zugleich ſenkrecht auf eine der Seiten z. E. DC; nähmlich, nach einer geraden Linie welche in der Ebene DCB, auf DC ſenkrecht ſtand.

Nach-

Nachdem also der Winkel DCB, spitzig, ein rechter, oder stumpf, war, nachdem kraf CB, in den Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der Ebene DCB, unter C, oder gar nicht, oder über C in die Verlängerung Cβ.

So entstanden drey Schnitte, des spitzwinklichten, rechtwinklichten, stumpfwinklichten Kegels.

Später hin, bemerkte man, daß sich jede dieser drey Linien, aus jedem der genannten drey Kegel schneiden lieffe, wenn die schneidende Ebene, zwar auf der Ebene DCB senkrecht bliebe, aber nicht auf DC.

Man bemerkte auch die Eigenschaften dieser Schnitte von denen sie die Nahmen; Ellipse, Parabel, Hyperbel bekamen. Ferner, daß sie nicht nur im gleichseitigen Kegel sondern auch im ungleichseitigen entstanden.

III. In dieser Allgemeinheit hat Apollonius Pergäus die Kegelschnitte abgehandelt, vier Bücher von den Kegelschnitten die Euklides hinterlassen hatte ergänzt, und vier andre beygefügt. Den Innhalt derselben, erzählt Pappus in der Vorrede zum 7. Buche seiner Collectionum mathematicarum.

IV. Von diesen acht Büchern sind bisher nur noch die ersten vier griechisch vorhanden. Hie nenne ich von ihren Ausgaben, nur die lateinische Apollonii Pergaei libri IV. per Isaac. Barrow; Lond. 1675. Barrow hat durch den

Ge-

Gebrauch arithmetiſcher Zeichen, die Beweiſe erleichtert und abgekürzt, wie bey ſeinem Euklid.

V. Von dem 5. 6. 7. Buche hat man arabiſche Ueberſetzungen gefunden und ſolche lateiniſch gemacht. Apollonii Pergaei Conicor. Lib. V. VI. VII. paraphraſte Abalphato Aſpahenſi .. additus in calce Archimedis aſſumtor. liber .. Florenz 1661. fol. Der Maronite Abrahamus Ecchellenſis, verfertigte die Ueberſetzung, und da er keine Mathematik verſtand, half ihm Joh. Alfons Borellus, welcher, ohne das Arabiſche zu verſtehen, oft nach Betrachtung der Figuren dem Ueberſetzer vorſagte, was dieſer in ſeiner Grundſprache fand.

Apollonii Conicarum Sectionum Libri V. VI. VII. .. a Chriſtiano Ravio .. Kiel 1669. 12°. Ravius hat eine arabiſche Ueberſetzung eines Perſers Abdilmeliki Shirazitae, ziemlich eilfertig überſetzt, auch ohne eigne Kenntniß der Sachen. Der Profeſſor zu Kiel, Samuel Reiher, hat die Ausgabe veranſtaltet, ſie erſchien auf Koſten Salomon Reihers. Es ſind keine Figuren dabey, und das Buch iſt nur eine litterariſche Merkwürdigkeit.

VI. Apollonii Pergaei Conicor. libri octo, et Sereni Antiſſenſis de ſectione cylindri et coni libri duo. Oxon. 1710. fol. Die vier erſten Bücher griechiſch und lateiniſch, mit Pappi Alexandrini Lemmatis, und Eutocii Aſcalonitae Commentariis, von Edmund Hallei, Prof. Savilian.

milian. der Geometrie zu Oxford, herausgegeben.

Auch von Halley, das V. VI. VII. aus dem arabischen. Der Uebersetzer wird Thebit ben Corah genannt, Ben Moses hat sie verbessert. Halley hat des Pappus Lemmata, griechisch und lateinisch beygefügt.

Das achte Buch haben die arabischen Uebersetzer griechisch nicht gehabt. Es ist also vermuthlich früh verlohren gegangen.

Sein Innhalt, lässt sich aus dem Pappus annehmen, und so hat Halley, es durch eine Divination, restituirt, das ist: die Sätze ausgeführt, die es enthalten hatte. Der erste ist: Wenn man in der Parabel, den Parameter für irgend einen Durchmesser weiß, den Parameter für jeden andern zu finden.

VII. Serenus betrachtet auch des schiefen Cylinders Schnitt, welcher ebenfalls eine Ellipse; beym Kegel besonders Eigenschaften des Dreyecks das der Schnitt durch die Axe giebt.

VIII. Hausen Elementa Matheseos Pars prima, Lipſ. 1734. (Es ist weiter nichts herausgekommen) endigen sich: mit der Geometria sectionum conicarum, der besten Einleitung unter den neuern. Der Vortrag ist ganz auf Betrachtung der Figuren gegründet, nach Art der griechischen Geometer.

IX. Der gleichseitige Kegel, ist ein runder Körper, seine krumme Fläche beschreibt die Hy-

pote-

potenuse eines rechtwinklichten Dreyecks um eine der Seiten als Axe gedreht. Der ungleichseitige aber ist kein runder Körper. Drehte man ein stumpfwinklichtes Dreyeck um eine der beyden kleinern Seiten, so beschriebe die Seite die dem stumpfen Winkel gegenübersteht, nicht etwa die krumme Fläche eines ungleichseitigen Kegels, wie in einem und dem andern geometrischen Lehrbuche, aus Uebereilung ist gesagt worden, sondern, es entstünden zweene gleichseitige Kegel, deren gemeinschaftliche Grundfläche hätte zum Halbmesser das Perpendikel vom Scheitel des Winkels welcher der Seite gegenübersteht um welche die Umdrehung geschieht auf diese Seite, des kleinern Spitze befände sich da wo des Dreyecks stumpfer Winkel seinen Scheitel hat, und die Umdrehung der beyden Seiten des stumpfwinklichten Dreyecks, gäbe also einen gleichseitigen Kegel mit einer Höhlung die auch ein gleichseitiger Kegel ist.

X. Was also von §. 50. an aus der Gleichung des gleichseitigen Kegels, als eines runden Körpers ist hergeleitet worden, dient nicht für Schnitte des ungleichseitigen Kegels für den muß eine andre Gleichung gebraucht werden.

XI. Euler, am (I) angeführten Orte, setzt den Unterschied zwischen gleichseitigen und ungleichseitigen Kegel darinn, daß bey dem letzten, Schnitte senkrecht auf die Axe, Ellipsen geben. Das ist wahr, aber ich dächte doch es wäre besser,

, dieſen Kegel ſo zu betrachten, wie ihn ſchon Elementargeometrie kennen lehrt, daß ſeine undfläche ein Kreis iſt, die Axe, mit dieſes eiſes Ebene ſchiefe Winkel macht. Dieſem näß habe ich für ihn die Gleichung zwiſchen drey rechtwinklichten Coordinaten gegeben. coni ſcaleni ſuperficie et rete; Prop. VI. in mmentat. Soc. Reg. Sc. Gott. Vol. IX. ad 1787. 1788.

Sollte ich alſo dieſes ungleichſeitigen Kegels hnitte ſuchen, ſo würde ich Eulers Verfahren ht brauchen.

570. Anm. Auch krumme Flächen können ander ſchneiden, wie eine Kugel einen Kegel ſtr. 302.) da iſt denn der Schnitt meiſtens e krumme Linie, deren Theile nicht alle in ei- Ebene liegen, ſondern immer aus einer Ebe in eine andere kommen. Er krümmt ſich alſo ppelt, in Abſicht auf die Lage der Theile bſt gegen einander, und in Abſicht auf eine timmte Ebene, z. E. die Grundfläche (516). eine orthographiſche Projection auf die Grund- che iſt eine krumme Linie, und ſeine Puncte gen über dieſer Projection, nicht in einer Ebe , ſondern ſelbſt in einer krummen Fläche. Ein chraubengang (Mech. 106.) iſt eine ſolche Li- . Siehe Clairaut; Recherches ſur les cour- s à double courbure, Par. 1731. Eine Spur n der Art die Natur der Flächen, ſo wie hier ſchehen iſt, zu beſtimmen, findet ſich beym

Pappus VII. Buch 235. Satz; und selbst der Nahme: locus ad superficiem, dessen Bedeutung aus 497. mit 516. verglichen leicht zu errathen ist. Zum Unglücke ist die Stelle gleich verderbt, und deßwegen undeutlich. Uebrigens kommen in practischen Theilen der Mathematik viel Fälle vor, wo diese Untersuchungen von den Flächen und ihren Schnitten angewandt werden können. Die perspectivische Vorstellung eines ebenen Gegenstandes; ist der Schnitt der Tafel mit einer Art von Kegel, dessen Spitze das Auge, die Grundfläche der Gegenstand ist (Persp. 5.). Eine weitläuftige Anwendung solcher Untersuchungen auf die Gewölber hat Frezier gemacht; Siehe dessen Theorie et Pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des Voutes etc. Par. 1737. 1739. 3 Quartbände. Freziers Vortrag ist durchaus synthetisch und aus Betrachtung der Figuren hergeleitet. Einiges dazu gehörige analytisch abgehandelt enthält mein Aufsatz: Cylindrorum rectorum se decussantium sectiones, ad geometriam fornicum relatae Commentat. Soc. Reg. Sc. Gott. Vol. X. ad 1789. und 1790. Eben daselbst: De fornicum superficiebus et solidis computandis.

Von den transcendentischen krummen Linien.

571. Erkl. Wenn eine Grösse y durch x so bestimmt wird, daß sich zwischen beyden keine algebrai-

braische rationale Gleichung geben lässt (323), heisst y eine transcendentische Function n x (323).

572. Zus. I. Wofern zwischen zwo Grössen ; y; eine rationale Gleichung statt findet, so höret zu jedem x eine bestimmte Menge von y; viel nähmlich als y in der Gleichung Abmesngen hat (328). Kann man also erweisen, ıß zu einem x eine grössere Menge von y als ren Zahl man angeben könnte, unzählich viel gehören, so ist y eine transcendentische Funcon von x; Und umgekehrt, wenn y eine transendentische Function von x ist, so gehören zu dem x unzählich viel y. Gehörten zu jedem x ne bestimmte Menge, so müsste sich solches urch eine algebraische Gleichung zwischen beyen angeben lassen, die nicht höher als auf den Grad dieser Menge steigen könnte.

II. Eine Gleichung kann hohe Potenzen von enthalten und doch nicht soviel mögliche Werhe angeben als der höchste Exponent Einheiten at. In $y^3 = a^2 . x$ gehören jeder Abscisse drey Ordinaten aber nur eine davon ist möglich (240). Die Verzeichnung der krummen Linie, stellt also nur den einen möglichen Schenkel dar, ohngeachet die Gleichung drey Schenkel andeutet.

III. Wüsste man also aus dem gegenseitigen Verhalten der Grössen, daß zu einem y unzählich viel x gehören, daß aber von diesen x nicht alle möglich sind, etwa nur eins, oder nur eine

potenuse eines rechtwinklichten Dreyecks um eine der Seiten als Axe gedreht. Der ungleichseitige aber ist kein runder Körper. Drehte man ein stumpfwinklichtes Dreyeck um eine der beyden kleinern Seiten, so beschriebe die Seite die dem stumpfen Winkel gegenübersteht, nicht etwa die krumme Fläche eines ungleichseitigen Kegels, wie in einem und dem andern geometrischen Lehrbuche, aus Uebereilung ist gesagt worden, sondern, es entstünden zweene gleichseitige Kegel, deren gemeinschaftliche Grundfläche hätte zum Halbmesser das Perpendikel vom Scheitel des Winkels welcher der Seite gegenübersteht um welche die Umdrehung geschieht auf diese Seite, des kleinern Spitze befände sich da wo des Dreyecks stumpfer Winkel seinen Scheitel hat, und die Umdrehung der beyden Seiten des stumpfwinklichten Dreyecks, gäbe also einen gleichseitigen Kegel mit einer Höhlung die auch ein gleichseitiger Kegel ist.

X. Was also von §. 50. an aus der Gleichung des gleichseitigen Kegels, als eines runden Körpers ist hergeleitet worden, dient nicht für Schnitte des ungleichseitigen Kegels für den muß eine andre Gleichung gebraucht werden.

XI. Euler, am (I) angeführten Orte, setzt den Unterschied zwischen gleichseitigen und ungleichseitigen Kegel darinn, daß bey dem letzten, Schnitte senkrecht auf die Axe, Ellipsen geben. Das ist wahr, aber ich dächte doch es wäre bes-

ser,

ser, diesen Kegel so zu betrachten, wie ihn schon die Elementargeometrie kennen lehrt, daß seine Grundfläche ein Kreis ist, die Axe, mit dieses Kreises Ebene schiefe Winkel macht. Diesem gemäß habe ich für ihn die Gleichung zwischen den drey rechtwinklichten Coordinaten gegeben. De coni scaleni superficie et rete; Prop. VI. in Commentat. Soc. Reg. Sc. Gott. Vol. IX. ad ann. 1787. 1788.

Sollte ich also dieses ungleichseitigen Kegels Schnitte suchen, so würde ich Eulers Verfahren nicht brauchen.

570. **Anm.** Auch krumme Flächen können einander schneiden, wie eine Kugel einen Kegel (Astr. 302.) da ist denn der Schnitt meistens eine krumme Linie, deren Theile nicht alle in einer Ebene liegen, sondern immer aus einer Ebene in eine andere kommen. Er krümmt sich also doppelt, in Absicht auf die Lage der Theile selbst gegen einander, und in Absicht auf eine bestimmte Ebene, z. E. die Grundfläche (516). Seine orthographische Projection auf die Grundfläche ist eine krumme Linie, und seine Puncte liegen über dieser Projection, nicht in einer Ebene, sondern selbst in einer krummen Fläche. Ein Schraubengang (Mech. 106.) ist eine solche Linie. Siehe Clairaut; Recherches sur les courbes à double courbure, Par. 1731. Eine Spur von der Art die Natur der Flächen, so wie hier geschehen ist, zu bestimmen, findet sich beym

Pappus VII. Buch 235. Satz; und ſelbſt der Nahme: locus ad ſuperficiem, deſſen Bedeutung aus 497. mit 516. verglichen leicht zu errathen iſt. Zum Unglücke iſt die Stelle gleich verderbt, und deßwegen undeutlich. Uebrigens kommen in practiſchen Theilen der Mathematik viel Fälle vor, wo dieſe Unterſuchungen von den Flächen und ihren Schnitten angewandt werden können. Die perſpectiviſche Vorſtellung eines ebenen Gegenſtandes; iſt der Schnitt der Tafel mit einer Art von Kegel, deſſen Spitze das Auge, die Grundfläche der Gegenſtand iſt (Perſp. 5.). Eine weitläuftige Anwendung ſolcher Unterſuchungen auf die Gewölber hat Frezier gemacht; Siehe deſſen Theorie et Pratique de la coupe des pierres et des bois pour la conſtruction des Voutes etc. Par. 1737. 1739. 3 Quartbände. Freziers Vortrag iſt durchaus ſynthetiſch und aus Betrachtung der Figuren hergeleitet. Einiges dazu gehörige analytiſch abgehandelt enthält mein Aufſatz: Cylindrorum rectorum ſe decuſſantium ſectiones, ad geometriam fornicum relatae Commentat. Soc. Reg. Sc. Gott. Vol. X. ad 1789. und 1790. Eben daſelbſt: De fornicum ſuperficiebus et ſolidis computandis.

Von den tranſcendentiſchen krummen Linien.

571. Erkl. Wenn eine Gröſſe y durch x ſo beſtimmt wird, daß ſich zwiſchen beyden keine algebrai-

gebraiſche rationale Gleichung geben läſſt (323), ſo heiſſt y eine tranſcendentiſche Function von x (323).

572. Zuſ. I. Wofern zwiſchen zwo Gröſſen x; y; eine rationale Gleichung ſtatt findet, ſo gehöret zu jedem x eine beſtimmte Menge von y; ſoviel nähmlich als y in der Gleichung Abmeſſungen hat (328). Kann man alſo erweiſen, daß zu einem x eine gröſſere Menge von y als deren Zahl man angeben könnte, unzählich viel y gehören, ſo iſt y eine tranſcendentiſche Function von x; Und umgekehrt, wenn y eine tranſcendentiſche Function von x iſt, ſo gehören zu jedem x unzählich viel y. Gehörten zu jedem x eine beſtimmte Menge, ſo müſſte ſich ſolches durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen beyden angeben laſſen, die nicht höher als auf den Grad dieſer Menge ſteigen könnte.

II. Eine Gleichung kann hohe Potenzen von y enthalten und doch nicht ſoviel mögliche Werthe angeben als der höchſte Exponent Einheiten hat. In $y^3 = a^2 . x$ gehören jeder Abſciſſe drey Ordinaten aber nur eine davon iſt möglich (240). Die Verzeichnung der krummen Linie, ſtellt alſo nur den einen möglichen Schenkel dar, ohngeachtet die Gleichung drey Schenkel andeutet.

III. Wüſſte man alſo aus dem gegenſeitigen Verhalten der Gröſſen, daß zu einem y unzählich viel x gehören, daß aber von dieſen x nicht alle möglich ſind, etwa nur eins, oder nur eine

593. Zuſ. Nachdem die Linie CA ihren Umlauf vollendet hat, kann ſie ſich noch weiter drehen. Wenn ſie ſo das zweytemahl in die Lage CP kömmt, ſo iſt der Winkel, den ſie ſolchergeſtalt von der erſten Lage CA an beſchrieben hat, $= 4R + ACP$; und ſein Maaß; der ihm zugehörige Bogen, von AC an, den ganzen Umkreis herum und bis wieder in P genommen $= p + x$; der Punct kann bey dieſem fortgeſetzten Drehen ſeine Bewegung über die Länge des Halbmeſſers hinaus, ebenfalls fortſetzen, und alſo nun in 2M ſeyn, daß $p : p + x = r : C2M$ oder $C2M = r.(p + x) : p = r + rx : p = r + CM$; Nach Vollendung des zweyten Umlaufs, kann der Umlauf zum drittenmahle wiederhohlt werden, wenn die Linie zum drittenmahle in die Lage CP kömmt, hat ſie von ihrer erſten Lage an den Winkel $2.4R + ACP$; beſchrieben, und der zugehörige Bogen, iſt $2p + x$ folglich befindet ſich der Punct, der auf dem Halbmeſſer fortgeht, in 3M daß $C3M = r.(2p + x) : p$ oder $= 2r + CM$; und ſo erhellt, daß dieſer bewegliche Punct um die Länge $n.r + CM$ von C entfernt ſeyn wird, wenn die Linie nach n vollendeten Umläufen, das $n + 1$te mahl in die Lage CP kömmt, und n kann ſo groß als man will, oder unendlich werden; Es giebt alſo in einer Linie CP unzählich viel Puncte M; 2M; 3M; u. ſ. w.

594. Erkl. Was von der Spirallinie, bey dem erſten, zweyten, dritten, u. ſ. w. Umlaufe

des

ausgedruckt werden sollen, eine unendliche Theilung der Einheit; Irrationalzahlen erfodern eine solche Theilung allemahl.

574. Erkl. Eine Linie heisst **transcendentisch**, wenn ihre Puncte durch transcendentische Functionen bestimmt werden.

575. Zus. Nimmt man für sie Coordinaten (331), so kann die Ordinate keine algebraische Function der Abscisse seyn. Sie muß aber gleichwohl durch die Abscisse gegeben seyn, wenn alle Puncte der krummen Linie nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gegeben sind: Sie ist also eine transcendentische Function der Abscisse, und es giebt für eine Abscisse unzählich viel Ordinaten (572) darunter vielleicht unmögliche sind (572. III.).

576. Zus. Eine transcendentische Linie ist als eine krumme Linie von einer höhern Ordnung als alle Ordnungen, die sich angeben lassen, von einer **unendlichen** Ordnung anzusehen (465). Sie kann also von einer geraden Linie in unzählich viel Puncten geschnitten werden (492), wie auch aus 575. mit der da angezeigten Erinnerung erhellet.

577. Zus. Umgekehrt; wenn man von einer krummen Linie aus ihrer Erklärung erweisen kann, daß sie sich von einer geraden Linie in unzählich viel Puncten schneiden läßt, so ist diese Linie transcendentisch (492).

578. **Erkl.** In der 33. Fig. sey ein Kreis mit dem Halbmesser CA = r beschrieben, sein Umfang heisse = p. Von der Linie CA an, deren Lage ungeändert bleibt, nehme man einen willkührlichen Winkel ACP; und auf dessen Schenkel CP; die Länge CM so daß 4R: ACP = CA: CM; so ist der Punct M in der **Archimedischen Schneckenlinie** oder **Spirallinie**: (spiralis *vel* helix).

579. **Anm.** Archimedes hat nähmlich diese Schneckenlinie in einem besonderen Buche betrachtet.

580. **Zus.** Man nenne CM = y; den Bogen AP = x; so ist p: x = r: y oder py = rx eine Gleichung für die Schneckenlinie, wo aber die Coordinaten nicht, wie bisher gewöhnlich war, beschaffen sind, die eine ein Bogen ist.

581. **Zus.** Für x = o; ist y = o; So lange x kleiner als p; ist y < r also M innerhalb des Kreises: für x = p oder wenn der Bogen AP sich in die Peripherie APQA verwandelt, ist y = r; und der Punct M fällt in A; daß also CMNA die Spirallinie für den ganzen Umkreis ist.

590. **Erkl.** Eine Linie CP drehet sich mit **gleichförmiger Winkelbewegung** (motu angulari vniformi;) so nähmlich, daß sie in gleichen Zeiten ihre Lage um gleiche Winkel verändert; oder daß wofern sie gleich lange Zeiten braucht, aus der Lage CA in CP; und aus der

CP

CP in CQ zu kommen, die Winkel ACP = PCQ; Ein Punct aber bewegt sich auf einer Linie gleichförmig, wenn er auf ihr in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibet. So wird sich P durch den Umfang des gegebenen Kreises gleichförmig bewegen, indem sich CP gleichförmig dreht.

591. Zus. Wenn zwo Zeiten T; t; die beyden in ihnen gleichförmig beschriebenen Winkel oder Räume S; s; heissen, so ist T: t = S: s; denn man kann allemahl eine Zeit annehmen, welche die beyden Zeiten T; t; misst; Sie sey in T; m mahl, in t; n mahl enthalten, so ist (Geom. 24. S. 1. Zus.) der Winkel oder Raum, der während dieses Maasses beschrieben wird, in S; m mahl; in s; n mahl enthalten, also T: t = m: n = S: s.

592. Zus. Die Linie CA drehe sich von der ersten Lage CA an mit gleichförmiger Winkelbewegung; auf dieser Linie, die sich so dreht, bewege sich ein Punct von C aus gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher er die Länge CA durchlaufen kann, in dem sich die Linie durch 4 R gedrehet hat; so ist M seine Lage auf CP; denn wenn die Zeit des ganzen Umlaufes, oder des Weges durch CA = T; die Zeit, in welcher der Winkel ACP beschrieben wird, t heisst, so ist T; t = p: x; Aber auch r: CM = p: x (180) also r: y = T: t, wie nach 591. seyn soll.

593. Zuſ. Nachdem die Linie CA ihren Umlauf vollendet hat, kann ſie ſich noch weiter drehen. Wenn ſie ſo das zweytemahl in die Lage CP kömmt, ſo iſt der Winkel, den ſie ſolchergeſtalt von der erſten Lage CA an beſchrieben hat, $= 4R + ACP$; und ſein Maaß; der ihm zugehörige Bogen, von AC an, den ganzen Umkreis herum und bis wieder in P genommen $= p + x$; der Punct kann bey dieſem fortgeſetzten Drehen ſeine Bewegung über die Länge des Halbmeſſers hinaus, ebenfalls fortſetzen, und alſo nun in 2M ſeyn, daß $p : p + x = r : C2M$ oder $C2M = r.(p+x) : p = r + rx : p = r + CM$; Nach Vollendung des zweyten Umlaufs, kann der Umlauf zum drittenmahle wiederhohlt werden, wenn die Linie zum drittenmahle in die Lage CP kömmt, hat ſie von ihrer erſten Lage an den Winkel $2.4R + ACP$; beſchrieben, und der zugehörige Bogen, iſt $2p + x$ folglich befindet ſich der Punct, der auf dem Halbmeſſer fortgeht, in 3M daß $C3M = r.(2p + x) : p$ oder $= 2r + CM$; und ſo erhellt, daß dieſer bewegliche Punct um die Länge $n.r + CM$ von C entfernt ſeyn wird, wenn die Linie nach n vollendeten Umläufen, das $n+1$te mahl in die Lage CP kömmt, und n kann ſo groß als man will, oder unendlich werden; Es giebt alſo in einer Linie CP unzählich viel Puncte M; 2M; 3M; u. ſ. w.

594. Erkl. Was von der Spirallinie, bey dem erſten, zweyten, dritten, u. ſ. w. Umlaufe

des

des Halbmessers beschrieben wird; heisst die erste; zweyte; dritte; u. s. w. Spirallinie; so hat sich Archimedes ausgedrückt. Eigentlich ist es von einer Spirallinie der erste, zweyte, dritte, u. s. w. Theil.

595. Zus. Die Spirallinie ist eine transcendentische Linie (593. 577.).

596. Zus. Man könnte zwischen den Geschwindigkeiten der Puncte P und M (590) oder zwischen x und y eine andere Verhältniß als die p : r (592) annehmen, z. E. man könnte setzen $\sqrt[m]{r^n} : \sqrt[m]{p^n} = y : x$ dieses gäbe $r^n x^m = p^n y^m$ eine Gleichung, welche unzählich viel andere Spirallinien enthielte. So könnte man annehmen $rx = mpy$; dieses gäbe eine Spirallinie, welche bey Vollendung des ersten Umlaufs die Linie CA in der Weite r : m vom Mittelpuncte schnitte.

597. Erkl. Ein Kreis BObo 34. Figur wälzt sich auf der geraden Linie AH von A nach H dergestalt, daß alle Theile seines Umfangs nach und nach alle Theile der Linie AH decken, so daß wenn anfangs des Kreises Punct B auf A; und nach diesem sein Punct D auf T fällt, die gerade Linie AT, des Bogens BOD Länge gleich ist: da alsdenn B in P kömmt, und folglich TKP = DGB. Unter diesen Umständen beschreibt der gegebene Punct B im Umfange des Kreises, die Radlinie (Cyclois) APF.

598. Anm. Ein Nagel B in einem Rade BObo würde eine solche Linie beschreiben, indem das Rad auf einem ebenen Wege fortgeführet würde; daher ist der deutsche Nahme, so wie der französische *roulette* entstanden.

599. Zus. Der Bogen BD; welcher in dem mit GB beschriebenen Kreise, des Winkels BGD Maaß ist, ist also der geraden Linie BT gleich.

600. Zus. Wenn man um G mit einem kleinern Halbmesser $G\beta = G\delta$ einen Kreis beschriebe, so wäre der Bogen $\beta\delta$ der in ihm des Winkels BGD Maaß ist, nicht so lang als der Bogen BD; Aber wenn sich der grosse Kreis wälzt, so wälzt sich der kleine concentrische auch mit, und wenn beyder Kreise gemeinschaftlicher Mittelpunct in K kömmt, kommen δ und D zugleich über T in die Linie KT, und von einer Linie, die durch β mit AT parallel ginge, wird ein Stück = AT zwischen GA; KT enthalten seyn. Auf diesem Stücke der Parallele hat sich aber der kleine Kreis fortgewälzt, in dem der grosse sich auf AT fortgewälzt hat. Ist AT also dem Bogen des grossen gleich, so ist die ihr gleiche Parallele mit AT, grösser als der ähnliche Bogen des kleinern, und folglich hat sich dieser Bogen auf einer Linie fortgewälzt, die seiner Länge nicht gleich ist. Eben so bekömmt man einen ähnlichen concentrischen Bogen, wenn man aus G mit einem grössern Halbmesser einen Kreis beschreibt, und dieser Bogen wälzt sich mit BD zugleich

gleich auf einer Linie fort, die der AT parallel und gleich, also kleiner als er ist. Dieser Ursache wegen war nöthig, die Bedingung (597) ausdrücklich zu erwähnen.

601. Anm. Vom Aristoteles an, der die scheinbare Schwürigkeit (600) schon in s. 24. mechan. Frage, bemerkt hat, (Blancani, Aristotelis loca mathematica Bonon. 1615. n. 263.) haben sich die Mathematikverständige solche zu heben bemüht. Hier wird es genug seyn, zu erinnern, daß es auf den Begriff des Wälzens ankömmt. Wird die Bedingung (597) dazu erfodert, so kann sich unter allen concentrischen Kreisen nur einer wälzen, und es ist willkührlich, welcher solches thun soll. Von den übrigen ähnlichen Bogen, fallen zwar alle Puncte nach und nach auf alle Puncte von Linien, die der AT parallel und gleich sind, aber das beweist die Gleichheit nicht, weil die Linien nicht Summen von Puncten sind (Geom. 5. Erkl.), und ähnliche Bogen concentrischer Kreise gleichviel Puncte haben, indem sich durch jeden Punct des einen, ein Halbmesser ziehen läßt, der einen Punct des andern angiebt. Man kann sich zur Erläuterung, reguläre Vielecke von einer Art z. E. reguläre Sechsecke vorstellen, die um einen Mittelpunct, eins innerhalb des andern verzeichnet sind: Wenn sich nun das äuserste, auf einer geraden Linie so wälzt, daß seine Seiten eine nach der andern Theile der geraden Linie decken,

so

so werden diese Theile zusammen hängen, und wenn sich das ganze Vieleck herumgewälzt hat, wird es eine Länge auf der Linie bedeckt haben, die seinem Umfange gleich ist. Aber zu gleicher Zeit, wird sich ein concentrisches, kleineres Vieleck, auf einer Parallele mit jener Linie dergestalt wälzen, daß die Theile dieser Linie welche seine Seiten nach einander bedecken, nicht zusammen hängen; Wenn es sich ganz herumgewälzt hat, welches mit dem äusern Vielecke zugleich geschehen ist, ist es auf seiner Parallele, über eben die Länge gegangen, über welche das äusere auf seiner Linie gegangen ist, aber es hat auf dieser Länge mit seinen Seiten nicht alles bedeckt, sondern nur Theile die nicht zusammen hingen; die Summe dieser Theile, macht den Umfang des kleinen Vielecks aus. Wenn man sich solche Vielecke immer von mehr und mehr Seiten vorstellt, so nähern sie sich dem Kreise, und so läßt sich hiedurch diese Schwierigkeit erläutern. Auf diese Art hat schon Galiläus die Sache betrachtet: discorsi intorno a due nuove scienze dial. 1; pag. 22. Tacquet in diss. de circulor. volutionibus bey seinen cylindricis und annularibus, hat ihn unglücklich getadelt.

602. Erkl. Der Kreis BObo heißt der beschreibende Kreis (circulus generator), B der beschreibende Punct (punct. describens) AH die Grundlinie.

603.

603. Aufg. Wenn der Halbmesser GB = r: und die Länge AT gegeben ist, den ihm zugehörigen Winkel BGD (597) zu finden.

Auflös. Es sey 1: π die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise, also des beschreibenden Kreises Umfang, 2πr; AT = u dem Bogen AD; so ist u: 2πr = AGD: 4R oder $\frac{2R.u}{\pi r}$ = AGD = PKT (597).

604. Zus. Für jede Stelle des Mittelpunctes K; ist u; also die Stelle von P gegeben, wenn man nur weiß, was für ein Winkel in einem gegebenen Kreise, einem Bogen von gegebener Länge zugehört, welches also mit der Quadratur des Kreises zusammenhängt (Geometr. 44. S. 7. Zus.).

605. Zus. Für u = πr ist AGD = 2R oder wenn AE = πr so ist des beschreibenden Punctes Stelle F. Der Halbkreis ELF ist alsdenn, was in der ersten Lage der Halbkreis bOB war, nähmlich b ist unten in E und B oben in F gekommen.

607. Zus. Durch einen willkührlichen Punct der Radlinie P; ziehe man PM mit AH parallel, die des beschreibenden Kreises Durchmesser über T und E; in N und M schneide. So ist AE = dem Bogen BODb = dem halben Umfange; und AT = dem Bogen BOD = dem Bogen TP (597) = dem Bogen LE; also AE — AT oder TE =

TE = dem Bogen (ELF — EL) = dem Bogen LF; Aber TE = PM — PN = PM — ML = PL.

608. Zuſ. Hieraus flieſſt folgende Art die Radlinie zu beſchreiben: AE ſey dem halben Umfange des beſchreibenden Kreiſes gleich; und EF, auf AS ſenkrecht ſein Durchmeſſer. Man beſchreibe nach A zu, ſeine Hälfte FLE; durch den Endpunct L des willkührlich angenommenen Bogens ziehe man LP der EA parallel, und dem Bogen FL gleich, ſo iſt P in der Radlinie.

Eben das mit des Kreiſes um FE anderer Hälfte gemacht, gibt auf der andern Seite einen Bogen der Radlinie, welcher dem Bogen APF gleich und ähnlich iſt.

609. Zuſ. Wenn FL = x; LP = y; ſo iſt y = x die Gleichung für die Radlinie.

610. Zuſ. So ſey 35. F. das Stück AF2A der Radlinie beſchrieben. Hier befindet ſich nun der Kreis bey 2A völlig in einer ſolchen Lage, wie die war, in der er ſich bey A befand; Alſo wird auf eben die Art ein neues gleiches und ähnliches Stück 2A 2F 3A; und nach dieſem wieder ein ſolches 3A 3F 4A u. ſ. w. beſchrieben werden, welches ohne Ende fortgeht, weil ſich der Kreis auf der Grundlinie ohne Ende fortwälzen kann. Er könnte ſich auch von A rückwärts wälzen. So beſteht die Radlinie aus unzählich vielen ähnlichen und gleichen Stücken, und wird alſo von der Grundlinie, und von Parallelen

mit

mit der Grundlinie, die näher als die Weite $2r$ beträgt, bey ihr sind, in unzählich viel Puncten geschnitten. Sie ist also eine transcendentische Linie (577).

611. I. Wälzt sich ein Kreis, wie (597) auf eines andern unbeweglichen Kreises äuserer Seite, daß auch gleiche Bogen des einen Kreises nach und nach gleiche (nicht ähnliche) des andern decken, so beschreibt ein gegebener Punct in dem wälzenden Kreise, eine **Epikykloide**. Wälzen an der Höhlung des unbeweglichen giebt eine **Hypokykloide**.

II. Diese Linien werden am besten in der Analysis des Unendlichen untersucht, daher ich hie nur einige historische Nachrichten gebe. Von ihnen handelt Joh. Bernoulli, Lectione Hospitaliana 21 ... 25.; Oper. Io. Bernoullii T. III.

III. Man begreift daß eben so eine krumme Linie sich an einer andern wälzen kann. Eine allgemeine Methode die krummen Linien die so entstehen zu finden giebt Nicole, Mém. de l'Ac. des Sc. 1707. p. 103. der holländ. Ausgabe.

IV. Wenn die Halbmesser beyder Kreise, des unbeweglichen und des wälzenden, eine Rationalverhältniß haben, so läßt sich jeder Punct der krummen Linie, algebraisch bestimmen, und sie ist also algebraisch; Aber transcendentisch wenn der Halbmesser Verhältniß irrational ist. Im ersten Falle, kömmt auch der beschreibende Punct, nach wiederholten Wälzungen, wiederum

an

an die Stelle wo er ausgegangen war, und wenn sich der Kreis noch weiter wälzt, beschreibt der Punct wiederhohlt die vorigen Züge. So besteht die krumme Linie aus einer endlichen Menge solcher Züge, und die Menge von Puncten in denen eine gerade Linie sie schneidet ist endlich. Das Gegentheil von allem diesen erfolgt wenn die Verhältniß der Halbmesser irrational ist.

V. Eine gerade Linie läßt sich als ein Bogen eines Kreises ansehen dessen Halbmesser unendlich wäre (Geom. 20. S. 2. Zus.). Zu dem, hat gewiß kein Halbmesser eines endlichen Kreises eine Rationalverhältniß. Daher ist die vorlängst betrachtete Radlinie, transcendentisch (610).

VI. Wenn sich, an der Höhlung eines unbeweglichen Kreises, einer wälzt, dessen Durchmesser jenes Halbmesser gleich ist, so beschreibt, ein gegebener Punct im Umfange des wälzenden eine gerade Linie. Diese merkwürdige Beschreibung einer geraden Linie durch Kreisbewegungen, lehret Copernicus, de revolutionibus orbium coelestium Lib. III. cap. 4.

VII. Den Gebrauch der Epikykloiden, und ihnen gleichlaufender Linien, bey Rad und Getriebe erwähne ich in meinen Anfangsgründen der Statik 76. Auch daselbst meine Abhandlungen de rotarum dentibus Commentat. Soc. Sc. Gott. Tom. IV. V. ad 1781. 1782.

612.

612. Lehrs. Zu der einzigen Sehne HM ſ. f. gehören unzählich viel Bogen.

Bew. Jeder Bogen, deſſen Endpuncte H und M ſind, gehört zu dieſer Sehne. Der kleinſte Bogen, der ihr zugehört, HLM; heiſſe u; und der Umfang P; ſo gehören zu der Sehne HM; folgende Bogen: HLM; HLMNHLM $= u + P$; HLMNHLMNLM $= u + 2P$ u. ſ. w. wenn man nähmlich zu dem Bogen HLM; den Umkreis MNHLM einmahl, zweymahl u. ſ. w. addirt, ſo bekömmt man jedesmahl einen Bogen, der ſich in H anfängt, und in M aufhört. Alſo gehört zu der Sehne HM folgende Reihe von Bogen

$$u;\ u + P;\ u + 2P \ldots . u + nP$$

wo n jede ganze bejahte Zahl; ſo groß als man will ſeyn kann, daß ſich alſo die Zahl der Glieder dieſer Reihe nicht angeben läſſt; Ferner gehört HM als Sehne zu den Bogen HNM $= P - u$; und HNMLHNM $= 2P - u$; u. ſ. w. zu allen Bogen

$$P - u;\ 2P - u;\ 3P - u; \ldots . nP - u;$$

aber ob gleich der Gröſſe nach einerley Sehne zu allen dieſen Bogen gehört, ſo gehört doch dieſe Sehne nicht zu allen Bogen mit einerley Zeichen. Man laſſe ſich eine Sehne um den Punct H von M nach N zu drehen, ſo wächſt ſie anfangs immer mit ihrem Bogen; bis ſie für den Halbkreis, dem Durchmeſſer gleich wird. Nach dieſem fängt ſie an abzunehmen, obgleich

ihr Bogen von H durch LMN gerechnet, immer gröſſer wird, und wird = o wenn ihr Bogen HLMNH dem Umfange gleich wird. Dreht ſie ſich alsdenn weiter und kömmt auf der andern Seite der Linie HM in Lagen, wie HL eine iſt; ſo ſind ihre Werthe verneint, weil eine bejahte Gröſſe, die nach einer beſtändigen Abnahme durch o geht, verneint wird, (S. 12. S. 14. 3.) unter dieſen verneinten Werthen bekömmt ſie auch den — HM; wenn ſie wieder in die Lage HM kömmt, und alſo iſt — HM die Sehne von u + P; Man laſſe ſich die Sehne immer ſo weiter um H drehen, und bemerke, daß jeder Durchgang durch o ein Uebergang in das Entgegengeſetzte iſt, ſo wird ihr anderer Endpunct den Bogen HMNH das zweytemahl durchlaufen, alſo wird ſie das zweytemahl = o und nach dieſem Durchgange wieder bejaht werden, alſo + HM die Sehne von u + 2P ſeyn; und ſo gehört abwechſelnd die Sehne

+ HM zu u; u + 2P; .... u + 2nP
— HM zu u + P; u + 3P; .... u + (2n + 1)P

Und weil erwieſenermaſſen jeder Zuſatz eines neuen Umkreiſes, bey der Sehne einen Durchgang durch o und einen Uebergang in das Entgegengeſetzte verurſacht, ſo gehört

+ HM zu P — u; 3P — u; .... (2n + 1) P — u;
— HM zu 2P — u; 4P — u; .... 2nP — u

In dieſen vier Reihen ſind alle Bogen enthalten, die zu der bejahten oder verneinten Sehne HM gehören.

613.

613. Lehrs. Zu jedem Sinus gehören unzählich viel Bogen.

Bew. L; M; seyn die Endpuncte eines Bogens; 5 F. Auf den Halbmesser OL fälle man das Perpendikel ME; dieses ist sein Sinus; (Trig. 2. Erkl.) Nun erhellt schon aus (612) daß unzählich viel Bogen die Endpuncte L; M; haben; Um aber genauer zu bestimmen, für welche von diesen Bogen der Sinus ME bejaht oder verneint gehört, sey der kleinste Bogen, der diesem Sinus zugehört, LM = w; Wenn man zu einem Bogen den halben Umkreis addirt, so ist der Sinus der Summe dem Sinus des Bogens entgegengesetzt und gleich; welches aus Trig. 2. Erkl. 4. Zus. allgemein erhellt; also gehört

$+ME$ zu $w; w+P; w+2P; \ldots\ w+nP;$

$-ME$ zu $w+\frac{1}{2}P; w+\frac{3}{2}P; \ldots w+\frac{2n-1}{2}P;$

auch

$+ME$ zu $\frac{1}{2}P-w; \frac{3}{2}P-w; \ldots\ldots \frac{2n-1}{2}P-w;$

$-ME$ zu $P-w; 2P-w; \ldots\ldots\ nP-w;$

Hier kann n jede ganze Zahl bedeuten, und so gehören zu jedem Sinus, bejaht oder verneint genommen, unzählich viel Bogen.

614. Zus. Eben so gehören zu jedem Cosinus, jeder Tangente, Contangente, Secante u. s. w. unzählich viel Bogen.

615. Anm. Hierauf beruht der Grund, warum jede Art einen Winkel in m Theile zu theilen, auf eine Gleichung von m Abmessungen führt; und warum man also durch die gemeine Geometrie weder einen Winkel in so viel Theile als man will theilen, noch jedes ordentliche Vieleck beschreiben kann. Hievon handelt das Programm zu meiner hiesigen Antrittsrede: Vnde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus Gott. 1756. Es nimmt auch die letzte Stelle in der Sammlung ein: Dissertationes Mathematicae et Physicae quas S. R. Sc. Gottingensi annis 1756..1766. obtulit A. G. Kaestner. Altenb. 1771. In meiner geometrischen Abhandl. II. Sammlung 24..27. Abh. habe ich diese Untersuchung ebenfalls angestellt.

616. Lehrs. **Zwischen dem Sinus EM und seinem Bogen LM; oder der Sehne HM und ihrem Bogen HLM lässt sich keine algebraische Gleichung finden.**

Bew. Sonst gäbe es für einen Sinus, oder für eine Sehne soviel Bogen, soviel Abmessungen der Bogen in dieser Gleichung hätte. Es gibt ihrer aber unzählich viel (605 : 612;)

617 Zus. Der Bogen ist eine transcendentische Function des Sinus oder der Sehne (572)

618. Zus. Imgleichen des Cosinus; der Tangente, u. s. w. (614)

619.

619. Anm. Wenn man nähmlich den Bogen LM daraus, daß ME sein Sinus ist, bestimmen wollte, so nähme man von diesem Bogen nichts an, das nicht unzählich viel andern eben so zukömmt. Was man also aus dieser Bestimmung herausbringt, muß alle diese unzählichen Bogen zugleich enthalten. Man fragt wirklich nach unzählich viel Dingen auch wenn man nur nach einem einzigen zu fragen glaubte, (§. 242.) denn ob man gleich vielleicht nur an den kleinsten Bogen LN denkt, so bringt man doch nichts in die Untersuchung, das ihm allein, und nicht auch den andern zugehörte.

620. Zus. Jedem zum Sinus +ME gehörigen Bogen, gehört ein Ausschnitt wie LOM zu, also gibt es keine algebraische Gleichung zwischen jedem unbestimmten Sinus EM; und dem ihm zugehörigen Sector LOM; und eben so nicht zwischen jeder Sehne HM und ihrem Ausschnitte HLMO; oder ihrem Abschnitte HLM.

621. Zus. In diesem Verstande sagt man, die unbestimmte Quadratur oder Rectification des Kreises (quadratura indefinita) sey unmöglich; Es lasse sich nähmlich keine algebraische Gleichung finden, welche jedes Stück des gegebenen Kreises LMO; oder LEM; das durch den Ausschnitt und das Dreyeck EOM gegeben wäre, (S. 44. S. 8. Z.) oder jeden Bogen dieses Kreises LM; durch den zugehörigen Sinus EM; oder Quersinus LE (der durch ME

gegeben ist (Trig. 3. Erkl. 1. Zus.) bestimmte; Ob aber nicht möglich sey, eine algebraische Vergleichung zwischen einem gewissen bestimmten Bogen, und seinem Sinus, seiner Tangente, u. s. w. zu finden; davon läßt sich nichts entscheiden, wiewohl man doch dergleichen bisher noch nicht gefunden hat. S. Euler Introd. ad analys. inf. L. II. §. 540. Gegenwärtiges dient G. 44. S. 3. Anm. zu erläutern.

622. Anm. Die Verzeichnung aller Puncte der Spirallinie (580) und der Radlinie (603) setzt die unbestimmte Rectification des Kreises zum voraus; daher sind diese Linien transcendentisch. Ueberhaupt sieht man hieraus, wie eine Menge transcendentischer Linien möglich ist, deren Verzeichnung auf der unbestimmten Quadratur oder Rectification des Kreises beruht. Die Quadratrix des Dinostratus, betrachte ich umständlich in der geometrischen Abhandl. II. Samml. N. 23.

623. Anm. Auser solchen transcendentischen Linien giebt es noch andere, von denen ich alsdenn Exempel beybringen will, wenn ich ihre Eigenschaften in der gehörigen Vollständigkeit und Verbindung abhandeln kann.

Von Ausdrückung der Functionen durch unendliche Reihen.

624. Lehrs. Es sey $o = a + bz + cz^2 + dz^3 \ldots$. (P) oder die Gleichung P enthalte lauter Potenzen von z, deren Exponen-

nenren bejahte ganze Zahlen sind. Diese Potenzen mögen so ohne Ende fortgehen, oder nur bis auf eine gewisse steigen. Soll nun z eine veränderliche Grösse bleiben, für die man entweder alle mögliche Grössen setzen kann, oder die man wenigstens so klein als man will annehmen, und also auch o statt ihrer setzen darf, so ist $a = o$; $b = o$; $c = o$; u. s. w. oder alle Coefficienten sind $= o$;

Beweis. Denn wenn $z = o$; so fallen alle Glieder bis auf das erste weg, also ist $a = o$; folglich $o = bz + cz^2 + dz^3 \ldots$ wo man mit z dividiren kann, und $o = b + cz + dz^2 \ldots$ erhält, wo $z = o$ gesetzt wieder $b = o$ giebt. Also ist nun $o = cz + dz^2 \ldots$ oder mit z dividirt $o = c + dz \ldots$ wo $z = o$ gesetzt $c = o$ giebt. Also ist $o = dz + \ldots$ und mit z dividirt; $o = d + \ldots$ und z in den folgenden Gliedern $= o$ gesetzt; $d = o$; u. s. w. Jeder Coefficient wird nähmlich zum ersten, weil alle vorhergehenden $= o$ werden, und so gilt von jedem, was vom ersten erwiesen wurde, daß er $= o$ war.

Anderer Beweis. Wenn die Coefficienten nicht o sind, und die Potenzen nicht ohne Ende fortgehen, so hat die Gleichung P nur soviel Wurzeln als sie Abmessungen hat, und daher kann man statt z nicht was man will, sondern nur eine der Wurzeln setzen. Gehen sie ohne

Ende fort, so hat zwar P unzählich viel Wurzeln wie 573 wenn dorten $x = 0$; aber doch kann man statt z nicht alle mögliche Grössen, und besonders nicht so kleine, als man will, setzen. Also muß die Ursache, warum die Gleichung für jeden Werth von z richtig bleibt, nicht in dem Werthe von z; sondern in den Coefficienten zu suchen seyn, d. i. jeder von ihnen muß $= 0$ seyn.

Der hier gegebene Ausdruck einer Reihe ist nicht der allgemeinste. Sie könnte nähmlich $0 = A x^m + B x^{m+d} + C x^{m.+.2d.}$ seyn, und da fragte es sich, ob die Coefficienten auch jeder $= 0$ seyn müssten, wenn unter den Exponenten verneinte und gebrochne Zahlen vorkämen. Es ist aber $0 = A + B x^d + C x^{2d} \ldots$ Ist hier d bejaht, wenn es auch gleich eine gebrochene Zahl wäre, so kann man $x^d = z$ setzen, und der Beweis läßt sich hier anbringen.

Ist aber d verneint, z. E. $= -e$; so setze man $\frac{1}{x} = y$ also $0 = A + By^e + Cy^{2e} \ldots$ Da nun x eine veränderliche Grösse ist, so kann es so groß werden als man will, und folglich y so klein als man will, daher sich wieder der Beweis anbringen läßt.

Anm. Die Reihe anzunehmen, so daß die Coefficienten durch die Rechnung bestimmt werden, hat Leibniz gelehrt. G. G. L. Supplementum

tum Geometriae Practicae Act. Erud. Lipſ. 1693; April. p. 78.

625. Aufg. Die Quadratwurzel von $1 + x$ durch eine unendliche Reihe zu finden.

Aufl. Man ſetze $\sqrt{(1+x)} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots$ alſo

$$1 + x = 1 + 2Ax + \left.\begin{matrix} AA \\ +2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2AB \\ +2C \end{matrix}\right\} x^3$$

$$+ \left.\begin{matrix} BB \\ +2AC \\ +2D \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2BC \\ +2AD \\ +2E \end{matrix}\right\} x^5$$

Wenn man hier alles auf eine Seite ſchafft, ſo ſieht die Gleichung ſo aus: $0 = 0 + 2Ax - 1$ u. ſ. w. die folgenden bleiben alle wie vorhin.

Alſo iſt nach (624) $2A - 1 = 0$; $A = \frac{1}{2}$; und dieſen Werth in dem nächſten Coefficienten gebraucht; $\frac{1}{4} + 2B = 0$; $B = -\frac{1}{8}$; und dieſe beyden gefundenen Werthe im nächſten Coefficienten gebraucht; $-\frac{1}{8} + 2C = 0$; $C = \frac{1}{16}$; und im nächſten $\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + 2D = 0$ oder $D = -\frac{5}{128}$; und im nächſten $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + 2E = 0$; $E = \frac{7}{256}$; alſo $\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048} \cdot x^7 - \frac{429}{32768} \cdot x^8 + \frac{715}{65536}x^9 - \frac{1215}{1441792} \cdot x^{10} \ldots$ welche Reihe ſich deſto ſchneller nähert, je kleiner der eigentliche Bruch x iſt; die Coefficienten, bis mit F; welcher $\frac{231}{1024}$ iſt, auf Decimaltheile

le gebracht, kömmt $1 + 0,5 x$ [redacted] $- 0,125 x^2 + 0,0625 x^3 - 0,0390625 . x^4 + 0,02734375 x^5 - 0,0205078125 x^6$ u. s. w.

Soll man aus einer ganzen Zahl die Quadratwurzel ziehn, so suche man das grösste Quadrat einer ganzen Zahl das in ihr enthalten ist, und drucke sie so aus: $a^2 + b = a^2 . \left(1 + \frac{b}{a^2}\right)$. So ist die Quadratwurzel $= a . \sqrt{\left(1 + \frac{b}{a^2}\right)}$.

So wäre $57 = 49 + 8$ und die Quadratwurzel $= 7 . \sqrt{(1 + \frac{8}{49})}$, wo $x = \frac{8}{49}$. Begreiflich nähert sich die Reihe desto schneller, je kleiner x, ist.

Die Coefficienten aber nehmen nicht sehr stark ab. Ist also x nicht gar klein, so muß man mehr Glieder berechnen, die Wurzel mit einiger Schärfe zu haben.

Immer wird diese Näherung bequemer seyn, als die Arbeit der gewöhnlichen Rechenkunst.

626. Ex. Es sey $x = 0,1$ oder man suche $\sqrt{1,1}$ so sind die bejahten Glieder

1,
0,05
0,0000625
0,0000002734375

1,0500627734375

die

die verneinten

— 0, 00125
— 0, 00000390625
— 0, 00000002050..

— 0, 00125392675
+ 1, 05006277343

1, 04880884668

Die Ziffern können nur bis auf die achte Decimalstelle richtig seyn, weil sich das letzte Glied der berechneten in dieser Stelle anfängt, das folgende wird sich also vermuthlich eine Stelle niedriger anfangen. In der That findet man durch fortgesetzte Rechnung, oder auf andere Art, den folgenden Coefficienten $= \frac{3}{1024} \cdot -\frac{4}{14}$ deren erste Ziffer 0,01 ist, daher sich das nächste Glied des Exempels in neunten Decimalstelle anfangen wird. Auch können die letzten unter den Ziffern, die man bis auf acht Stellen gefunden hat, unrichtig seyn, weil die Addition Ziffern in höhere Stellen geben kann.

627. I. Für eine Wurzel, oder eine Potenz, deren Exponent ein bejahter Bruch ist, läßt sich eine Reihe folgender Gestalt finden: Man nenne den bejahten Bruch $\frac{m}{n} = r$; m und n sind ganze Zahlen, beyde bejaht, ich schreibe nur der Bequemlichkeit wegen statt ihrer einen einzigen Buchstaben. Nun setze man $(z + e)^{\frac{m}{n}} = z^r + A.\, e.\, z^{r-1} + B.\, e^2.\, z^{r-2}$ u. s. w.

Diese

Fluxionenrechnung, die andern durch andere Kunstgriffe. Daher hat es mir der Mühe werth geschienen zu zeigen, wie diese Reihe nur eine sehr leichte Folge aus dem bekannten binomischen Lehrsatze ist. Das Unendliche in $(1+y)^{-1}$ wird durch sie nicht aufgehoben, sondern nur versteckt, denn die Grösse z lässt sich durch y nicht anders als vermittelst einer unendlichen Reihe ausdrucken. Die Colsonische Reihe kann zu Aufhebung des Unendlichen ohngefähr soviel leisten, als die diophanteische Analysis (183) zu Aufhebung des Irrationalen. Wenn man $\sqrt{(1+y)} = 1 + yz$ setzt, so findet sich $y = \frac{1-2z}{zz}$ und $1 + yz$ oder $\sqrt{(1+y)} = \frac{1-y}{z}$ das heisst aber nicht die Irrationalgrösse durch einen endlichen Ausdruck finden: denn dieser endliche Ausdruck giebt sie durch z; wollte man z durch y wegschaffen, so würde die unendliche Reihe wiederkommen. Eben so würde es in IV. gehen.

628. Zus. Dieses Verfahren (625) setzt zum voraus, daß man die Exponenten der gesuchten Reihe, oder die Gestalt dieser Reihe (formam seriei) schon weiß, und nur die Coefficienten sucht.

629. Anm. Wäre die Gestalt der Reihe nicht richtig angenommen worden, so entdeckt die Rechnung dieses sogleich, weil man für die

Coef-

einen Reihe von den Coefficienten bey eben der Potenz in der andern Reihe abgezogen würde, beyde aber zusammen sich aufheben müssten (624).

So findet man $n A = m$; und $A = \frac{m}{n}$;

$\frac{n.(n-1)}{1.2} AA + nB = \frac{m.(m-1)}{1.2}$ und $B = \frac{\frac{m}{n}.\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{1.2}$

Wenn man die Rechnung weiter fortsetzt so kommen der Reihe ⊙ Coefficienten eben so heraus, wie sie herausgekommen seyn würden, wenn man in 141. statt des Exponenten den Bruch $\frac{m}{n}$ gesetzt hätte. Aber dieses kann durch das vorhergehende Verfahren, welches sich beym Clairaut Alg. IV. Th. 54. §. findet, nicht allgemein bewiesen werden. Denn die folgenden Coefficienten der Potenz n der Reihe ⊙ werden immer mehr und mehr zusammengesetzt, und erfodern eine weitläuftigere Rechnung, so giebt dieses Verfahren weiter nichts als eine algebraische Muthmassung, daß die folgenden Coefficienten der Reihe ⊙ eben das Gesetz beobachten werden, das man bey den ersten, so weit sich diese Rechnung treiben läßt, wahrnimmt.

Nimmt man an, die Reihe ⊙ lasse sich nach 141. finden, wenn man statt des dortigen Expo-

ponenten den Bruch $\frac{m}{n}$ ſetzt, ſo erhellt zugleich ein wichtiger Unterſchied unter der Reihe 141. und der gegenwärtigen; Jene nähmlich hatte nur ein Glied mehr als der Exponent Einheiten hatte (145), dieſe aber geht ohne Ende fort, weil die ganzen Zahlen 1; 2; 3; u. ſ. w. von einem Bruche abgezogen nie o geben.

Bey dieſer Gelegenheit könnte das nur gebrauchte Verfahren eine Schwürigkeit veranlaſſen. Weil nähmlich $(z+e)^m$ nur $m+1$ Glieder, die Potenz n der Reihe ⊙ aber deren unzählich viel hat, ſo iſt die Frage, wie es ſich mit den Coefficienten dieſer Potenz verhält, die zu Gliedern, welche nach dem $m+1$ten folgen, gehören. Die Antwort iſt: Sie müſſen für ſich $=o$ ſeyn, weil ſie keine in $(z+e)^m$ haben, denen ſie gleich könnten geſetzt werden.

Wenn z. E. $m=1$; $n=2$; alſo $A=\frac{1}{2}$; $B=-\frac{1}{8}$; ſo iſt $\frac{n.(n-1)}{1.2}AA+nB=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=o$.

II. Wenn man $\frac{1}{x+f}=(x+f)^{-1}$ (Ar. II. 12.) $=x^{-1}-fx^{-2}+f^2x^{-3}\ldots$ (Alg. 6) auf die Potenz r erhebt; ſo findet man

$$(x+f)^{-r}=x^{-r}.fx^{-r-1}-\frac{r.(r-1)}{1.2}f^2x^{-r-2}$$

u. ſ. w. eben ſo als wenn man in 141;

x;

x; f; r; ſtatt a; b; m geſetzt hätte. Daher man die dortige Formel auch auf verneinte Exponenten erweitert. Es iſt aber wiederum dieſes Verfahren nicht zulänglich die Erweiterung auf alle Coefficienten zu rechtfertigen. Nimmt man ſie allgemein an, ſo wird die Reihe ebenfalls unendlich wie I;

III. Doch erhellt ſoviel, daß man den erſten und zweyten Coefficienten einer Potenz, deren Exponent gebrochen oder verneint, oder gebrochen und verneint iſt, ſicher finden kann, wenn man dieſen Exponenten ſtatt m in 141. ſetzt.

IV. Es gibt auch ein Verfahren eine endliche Reihe für eine Potenz eines ganzen verneinten Exponentens zu finden. Soll man $(1+y)^{-r}$ finden, ſo mache man $\frac{y}{1+y}=z$; oder $y=\frac{z}{1-z}$ und $1+y=\frac{1}{1-z}$ und $(1+y)^{-r}=(1-z)$ $=r\,1-r\,z^{r-1}\ldots$ (148) welche Reihe abbricht, wenn $-r$ eine ganze verneinte Zahl iſt.

V. Joh. Colſon (The method of Fluxions by Sir Iſaac Newton, translated by I. Colſon in der beygefügten Erläuterung Sect. V. p. 310.) ſagt, er habe dieſe Reihe erfunden, und ſie dem de Moivre mitgetheilt. Walz (Nou. Act. Erud. Lipſ. Mart. 1745; p. 144.) und Euler (Inſt. Calc. diff. P. II. §. 73.) haben ihre Erfindung auch gewieſen; Colſon zwar durch die

Flu-

Fluxionenrechnung, die andern durch andere Kunstgriffe. Daher hat es mir der Mühe werth geschienen zu zeigen, wie diese Reihe nur eine sehr leichte Folge aus dem bekannten binomischen Lehrsatze ist. Das Unendliche in $(1+y)^{-1}$ wird durch sie nicht aufgehoben, sondern nur versteckt, denn die Grösse z lässt sich durch y nicht anders als vermittelst einer unendlichen Reihe ausdrucken. Die Colsonische Reihe kann zu Aufhebung des Unendlichen ohngefähr soviel leisten, als die diophanteische Analysis (183) zu Aufhebung des Irrationalen. Wenn man $\sqrt{(1+y)} = 1 + yz$ setzt, so findet sich $y = \frac{1-2z}{zz}$ und $1 + yz$ oder $\sqrt{(1+y)} = \frac{1-y}{z}$ das heisst aber nicht die Irrationalgrösse durch einen endlichen Ausdruck finden: denn dieser endliche Ausdruck giebt sie durch z; wollte man z durch y wegschaffen, so würde die unendliche Reihe wiederkommen. Eben so würde es in IV. gehen.

628. Zus. Dieses Verfahren (625) setzt zum voraus, daß man die Exponenten der gesuchten Reihe, oder die Gestalt dieser Reihe (formam seriei) schon weiß, und nur die Coefficienten sucht.

629. Anm. Wäre die Gestalt der Reihe nicht richtig angenommen worden, so entdeckt die Rechnung dieses sogleich, weil man für die Coef-

Coefficienten Werthe, die nicht statt finden können, bekömmt. So erhellt, daß die angenommene Reihe ein Glied wie Ax haben muß, damit beym Quadriren in ihr die erste Potenz von x kömmt, welche gegenüber in $1+x$ auch zu finden ist. Gesetzt nun, man nehme die Reihe $1+Ax+Bx^{3:2}+Cx^{5:2}\ldots$ an; so wäre ihr Quadrat

$$1+2Ax+2Bx^{3:2}+AAx^{2}+2ABx^{5:2}+2AC\ldots.$$

Schafft man nun die gegenüberstehende Glieder $1+x$ auch auf diese Seite, so bekömmt man nach vorigem Verfahren $A-\frac{1}{2}=0$; $A=\frac{1}{2}$; $2B=0$; $A=0$ welches dem vorigen Werthe $\frac{1}{2}$ widerspricht, daß also keine Coefficienten dieser Reihe können gefunden werden.

630. Anm. Man wird finden, daß eben die Coefficienten wie 625; herauskommen, wenn man in (141) $\frac{1}{2}$ statt m setzt; Sie sind nähmlich alsdenn: $\frac{1}{2}$; $\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1.2}=-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$

$=+\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{2}-3}{4}=-\frac{5}{128}$ u. s. w.

631. Aufg. Aus einer Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen; die eine y, durch eine Reihe, deren Glieder nach Potenzen der andern x, geordnet sind, zu finden, wofern die Gestalt dieser Reihe (628) gegeben ist.

Aufl. Man setzt die angenommene Reihe statt y in die Gleichung, und bestimmt die Coefficienten nach (624) wie in (625).

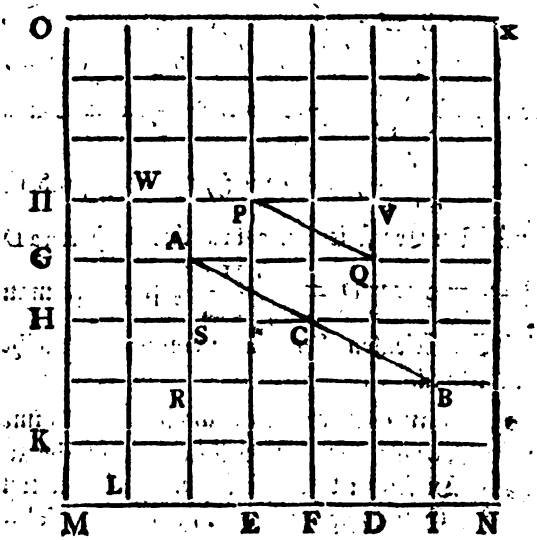
Ex. Für $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ nehme man an $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ so kömmt

$y^3 =$	A^3	$+ 3AABx$	$+ 3ABBxx$	$+ B^3x^3$
			$+ 3AAC$	$+ 6ACB$
				$+ 3AAD$
$aay =$	aaA	$+ aaB$	$+ aaC$	$+ aaD$ u.s.w.
$axy =$		$+ aA$	$+ aB$	$+ aC$
$-2a^3 =$	$-2a^3$			
$-x^3 =$				-1

Hier ist I) $A^3 + aaA - 2a^3 = 0$; Man versuche, ob sich a statt A setzen läßt; und weil dieses angeht, so ist ein Werth $a = A$; Man dividire die Gleichung I. mit $A - a$; so erhält man eine quadratische, deren beyde Wurzeln $a.(-1 \pm \sqrt{-7}) : 2$ sind; diese beyden unmöglichen Werthe von A braucht man also nicht, sondern den einzigen möglichen. Dieser in den Coefficienten zu x gesetzt, gibt II) $4aaB + aa = 0$, oder $B = -\frac{1}{4}$ beyde gefundene Werthe von A und B in den Coefficienten zu xx gesetzt, geben III) $-\frac{3a}{16} + 4aaC - \frac{1}{4}\frac{1}{a} = 0$ und $C = -\frac{1}{64.a}$; und endlich, ist das gefundene im nächsten Coefficienten gebraucht, IV) $4aaD - \frac{131}{128} = 0$ oder $D = +\frac{131}{512aa}$; so findet man soviel Coefficienten der angenommenen Reihe als man will.

632. Anm. Die ganze Schwürigkeit kömmt also nur darauf an, die Gestalt der Reihe zu finden. Dieses zu bewerkstelligen, hat Newton durch eine Erfindung angewiesen, die parallelogrammum Newtonianum genannt wird: Man findet sie in verschiedenen Schriften erklärt; unter andern in Newtons Method of Fluxions and infinite series, welche Joh. Colson aus Newtons lateinischen Manuscripte englisch übersetzt zu London 1736; 4° herausgegeben hat: Colson

hat solche in seinem beygefügten Commentario sehr weitläuftig erläutert, aber keinen tüchtigen Beweis davon gegeben. Weil mir auch sonst nirgends ein Beweis vorgekommen ist, habe ich dergleichen in einer 1743. zu Leipzig gehaltenen Disputation gegeben, die den Titel führet: Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series. Er kömmt auf folgende Sätze an:



633. Lehns. Die gerade Linie MN sey in soviel gleiche Theile als man will getheilet; einer sey ML; und MO welche auf sie senkrecht steht, sey in soviel gleiche Theile als man will getheilet, deren einer MK ist;

es

es mögen ML; MK; unter ſich gleich ſeyn oder nicht. Durch alle Theilungspuncte ziehe man Parallelen mit MN; MO; die einander, z. E. in A; P; C; begegnen. Ich behaupte folgendes:

I) Durch zweene Durchſchnittspuncte wie A; C; ziehe man eine gerade Linie AC. Wenn auf ihr zwiſchen A; C; kein anderer Durchſchnittspunct fällt; aber AC verlängert wird, bis CB = CA iſt, ſo wird B ein Durchſchnittspunct ſeyn, und auf CB zwiſchen C und B kein anderer fallen.

II) Wenn durch P; einen nach Gefallen angenommenen Durchſchnittspunct, PQ mit AC parallel und gleich gezogen wird, ſo iſt Q ein Durchſchnittspunct, und zwiſchen P und Q fällt auf PQ kein anderer.

Bew. Jedes Durchſchnittspunctes Weite von MO wird durch ML, und ſeine Weite von MN durch MK gemeſſen, oder dieſe Weiten ſind Vielfache von ML; MK; nach ganzen Zahlen. So iſt in der Figur CF = 3. MK; CH = 4. ML; Umgekehrt, wenn zugleich die Weite eines Punctes von MN durch MK; und ſeine Weite von MO durch ML gemeſſen wird, ſo iſt es ein Durchſchnittspunct.

I. Nun ſey für ſolche Weiten der Durchſchnittspuncte A; C; MG = r. MK; AG = n. ML; CF = (r − d). MK; CH = (n + δ). ML; wo r; n; d; δ; ganze Zahlen ſind; Mit

den Seiten des Rechtecks; MO; MN; ziehe man AS; CH; parallel, die einander in S begegnen; durch B ziehe man auch BI; BR; Weil BA = 2BC; so ist BR = 2CS = 2d. ML also MI = AG + BR = (n + 2d). ML. Eben so AR = 2AS = 2d. MK und BI = MG − AR = (n − 2d). MK; also werden MI; BI; des Punctes B. Entfernungen von den Seiten, durch ML; MK; gemessen, und B ist ein Durchschnittspunct. Gäbe es dergleichen auch zwischen B und C; so trage man desselben Weite von C auf der Linie CB; auf die andere Seite des Punctes C nach A zu; und erwiesener massen gäbe dieses auch einen Durchschnittspunct zwischen C und A, wieder die Voraussetzung.

II. Man ziehe durch P und Q Parallelen PΠ; QD; mit den Seiten, die einander in V begegnen. Weil AC = PQ; ACS = QPV; CAS = PQV; ist ΔSAC = ΔPVQ; also PV = SC; VQ = AS; Nun wird PE von MK; EM von ML gemessen, weil P nach der Voraussetzung ein Durchschnittspunct ist. Imgleichen wird VQ = AS von MK; und PV oder CS von ML gemessen, (aus I.) Folglich wird auch QD oder PE − VQ; von MK; und MD oder ME + VP von ML gemessen, (denn wenn zwo Gröſſen, Vielfache einer dritten sind, so ist jener beyden Summe oder Unterschied auch ein Vielfaches der dritten.) So ist also Q auch ein Durchschnittspunct. Zwischen P und Q fällt keiner. Denn fiele einer dazwischen, so schnei-

de

de man von C nach A zu auf CA ein Stück ab, das so groß ist als des Durchschnittspunctes, der zwischen P und Q fallen soll, Abstand von P; so fällt erwiesener massen auch ein Durchschnittspunct auf CA zwischen C und A wieder die Voraussetzung.

634. Anm. Wäre CF > MG; oder MF > AG so wären d oder δ verneint.

635. Anm. Newton betrachtet die Durchschnittspuncte als Winkelpuncte der kleinen Rechtecke, in welche das grosse getheilet wird; Colson als derselben Mittelpuncte. Beydes ist gleichgültig. Es erhellt auch, daß diese Schlüsse alle noch gelten würden, wenn man statt des Rechteckes ein schiefes Parallelogramm machte; welche Allgemeinheit aber hier von keinem Nutzen wäre.

$-m+5b$	$5b$	$m+5b$	$2m+5b$
$-m+4b$	$4b$	$m+4b$	$2m+4b$
$-m+3b$	$3b$	$m+3b$	$2m+3b$
$-m+2b$	$2b$	$m+2b$	$2m+2b$
$-m+b$	b	$m+b$	$2m+b$
$-m$	0	m	$2m$
$-m-b$	$-b$	$m-b$	$2m-b$
$-m-2b$	$-2b$	$m-2b$	$2m-2b$
$-m-3b$	$-3b$	$m-3b$	$2m-3b$

des Winkels ASC; unter SC; linker Hand SY: die beyden letzten lassen sich gewiesener Maassen auf die erste bringen. Also ist überhaupt folgendes wahr: Wenn sich das Linial parallel mit AC bewegt; so kömmt es nach und nach am Werthe, da die vorhergehenden von den folgenden abgezogen, alle bejahte Unterschiede geben, und also kleiner sind, wenn sie bejaht sind, und als kleiner können angesehen werden, wenn sie verneint sind. (Ar. I. 95.) Nähmlich $\lambda d : \delta + l$ und $r + nd : \delta$ könnten beyde zugleich, oder das letzte allein, verneint seyn, wenn r, n, und die übrigen Grösse zum Theil verneint würden; z. E. wenn A unter MN, oder linker Hand MO fiele. Alsdenn zeigt der Schluß $\lambda d : \delta + l > r + nd : \delta$ nur an, daß die Grösse zur rechten Hand, von der zur linken Hand abgezogen, was bejahtes lässt, oder daß $\lambda d : \delta + l - (r + nd : \delta) > 0$

Im Exempel 639; sind die Werthe, an welche das Linial nach und nach kömmt, $-b$; 0; $+b$; $2b$; und die verneinten abnehmenden, werden als wachsende angesehen.

641. Zus. Wie auch zweene Durchschnittspuncte in der Figur 633. liegen, so muß doch einer niedriger als der andere seyn, wenn nicht beyde in einer wagrechten Linie liegen; der untere soll allemahl C heissen: Nun kann C rechter Hand oder linker Hand der lothrechten Reihe liegen, in welcher sich A befindet. Im ersten

Falle

in dem Fache aus, das mit r b in einer wagrechten, und mit n m in einer lothrechten Reihe stehet.

So steht 5 b + 2 m zugleich von beyden Hauptreihen dem fünften der lothrechten und dem zweyten der wagrechten gegen über;

Diese Grösse nun r b + n m; wird das n te Glied, der r ten wagrechten Reihe seyn, und für die Glieder, die sich unter der wagrechten, oder linker Hand der lothrechten Hauptreihe befinden, sind r; n; verneint.

So ist 3 b + m; das erste Glied der dritten wagrechten Reihe; für — m — 3 b ist n = — 1; r = — 3 oder es ist das — 1ste Glied der — 3 ten wagrechten Reihe.

Wenn also die Seiten des Rechteckes MO; MN; den Hauptreihen zugehören, so befindet sich A (633. I.) in der n ten lothrechten, und in der r ten wagrechten, oder es ist A das n te Glied der r ten wagrechten Reihe, also = r b + n m; Eben so C = (r — d). b + (n + δ). m. Wenn nähmlich o stünde, wo M steht, so müsste m kommen, wo L steht; und einem Durchschnittspunct (633) in MN; dessen Abstand von MO; n. ML ist, gehört n. m zu, und r. b einem in MO dessen Abstand von M; r. MK ist.

So ist B = (r — 2 d). b + (n + 2 δ) m; also C — A = δm — bd = B — C. Wenn also durch A und C eine gerade Linie gezogen, ein Linial gelegt wird, so sind alle Werthe der

Durchſchnittspuncte, durch welche ſie geht, in einer arithmetiſchen Reihe.

637. Zuſ. P in (633. II.) ſey das λte Glied der 1ten wagrechten Reihe; alſo ſein Werth $l b + \lambda m$; ſo iſt $Q = (l - d).b + (\lambda + \delta)m$.

638. Zuſ. Wenn $\delta m - bd = 0$; oder $m = bd : \delta$; ſo werden alle Werthe, durch welche das Linial zugleich geht, gleich; und dieſen Werth von m gebraucht, findet man $A = (r + nd : \delta).b$; $P = (l + \lambda d : \delta).b = Q$. Wird alſo das Linial aus der Lage AC in die Lage PQ gebracht, die der vorigen parallel iſt, ſo geht es durch lauter gleiche Werthe.

639. Exempel. Das Linial gehe in der erſten Lage durch $-m + b$; $-b$; $m - 3b$; jedes Paar von dieſen Werthen gibt eine Gleichung, daraus $2b = m$ folgt; Nach dieſem wird das Linial durch $-m + 2b$; 0; $m - 2b$; alsdenn durch $-m + 3b$; b; $m - b$; $2m - 3b$; endlich durch $-m + 4b$; $2b$; m; $2m - 2b$; gehen, wo alle Werthe, durch welche es auf einmahl geht, gleich gefunden werden, wenn man $2b$ ſtatt m ſetzt. Alsdenn wird nähmlich $-2m + 2b = -2b + 2b = 0$ und $m - 2b = 2b - 2b = 0$; aus $-m + 3b$ wird $-2b + 3b = +b$ aus $-m + 4b$ wird $2b$ u. ſ. w.

640. Zuſ. Innerhalb des Winkels ASC 36 F. rechter Hand der Linie AC befinde ſich P; und mit SC; SA; CA; ziehe man durch P Parallelen, PW; PD; YX; ſo iſt $SY > SA$ und ΔPWY

$\Delta PWY \sim \Delta ASC$ also $WY : WP = SA : SC$ und $WY = WP \cdot SA : SC$ also $SY = PD + WP \cdot SA : SC$. Nun ist PE des Punctes P Entfernung von MN, (in der Fig. 633.) $= l \cdot MK$; davon CF abgezogen, lässt $PD = (l - r + d) \cdot MK$; Eben so gibt das dortige PH oder $\lambda \cdot ML$; um AG vermindert, $PW = (\lambda - n) \cdot ML$. Also ist $SY = ((\lambda - n) \cdot d : \delta + l + d - r) \cdot MK$. Weil nun $AS = d \cdot MK$; und $SY > AS$ so ist $(\lambda - n) \cdot d : \delta + l + d - r > d$; und $\lambda d : \delta + l > r + nd : \delta$ Hieraus, und aus dem was 638. angenommen worden; folgt $P > A$;

Nun falle p auserhalb des Winkels ASC; doch rechter Hand der Linie AC; Man ziehe durch p eine Parallele mit AC die den Linien SC; SA; in X; Y; begegnet, und nehme auf ihr $p\,2p = 2p\,3p$ u. s. w. alle $= AC$; so sind $1p$; $3p$ Durchschnittspuncte, (633. II.) alle von gleichen Werthen mit p (637). Einer dieser Puncte fällt nothwendig innerhalb des Winkels ASC; denn man kömmt solchergestalt auf Linien, $p\,2p$; $p\,3p$; $p\,4p$; deren eine gewiß ein Vielfaches von CA wird, das so groß als pX; oder grösser ist. Im letzten Falle ist die Sache klar; im ersten schneide man von X aus auf XY nach Y zu noch ein Stück $= CA$ ab, so giebt es einen Punct, der innerhalb des Winkels SCA fällt, weil $XY > AC$.

Es gibt drey Lagen, in denen P, rechter Hand der Linie AC liegen kann. Innerhalb

des

des Winkels ASC; unter SC; linker Hand SY: die beyden letzten lassen sich gewiesener Maassen auf die erste bringen. Also ist überhaupt folgendes wahr: Wenn sich das Linial parallel mit AC bewegt; so kömmt es nach und nach am Werthe, da die vorhergehenden von den folgenden abgezogen, alle bejahte Unterschiede geben, und also kleiner sind, wenn sie bejaht sind, und als kleiner können angesehen werden, wenn sie verneint sind. (Ar. I. 95.) Nähmlich $\lambda d : \delta + l$ und $r + nd : \delta$ könnten beyde zugleich, oder das letzte allein, verneint seyn, wenn r, n, und die übrigen Gröſſen zum Theil verneint würden; z. E. wenn A unter MN, oder linker Hand MO fiele. Alsdenn zeigt der Schluß $\lambda d : \delta + l > r + nd : \delta$ nur an, daß die Gröſſe zur rechten Hand, von der zur linken Hand abgezogen, was bejahtes läſſt, oder daß $\lambda d : \delta + l - (r + nd : \delta) > o$

Im Exempel 639; sind die Werthe, an welche das Linial nach und nach kömmt, $-b$; o; $+b$; $2b$; und die verneinten abnehmenden, werden als wachsende angesehen.

641. Zus. Wie auch zweene Durchschnittspuncte in der Figur 633. liegen, so muß doch einer niedriger als der andere seyn, wenn nicht beyde in einer wagrechten Linie liegen; der untere soll allemahl C heiſſen: Nun kann C rechter Hand oder linker Hand der lothrechten Reihe liegen, in welcher sich A befindet. Im ersten

Falle

Falle ist CH = (n + δ) ML; und den habe ich bisher betrachtet. Im zweyten ist CH = (n — δ). ML; und C = (r — d). b + (n — δ). m; dieser Werth dem Werthe von A welcher keine Veränderung litt, gleichgesetzt, giebt m = — bd: δ; Also ist m allemahl verneint, wenn C linker Hand in Absicht auf A liegt.

Für C = — m — 3 b und A = 2 m — 2 b ist m = — ⅓ b und C = A = — ⅔ b.

Alle Fälle, und die ihnen zugehörigen Werthe von m enthält folgende Tafel. Jeder Werth von m ist bd: δ, und ich deute nur durch sein Zeichen an, ob er bejaht oder verneint ist.

Werthe von m	A hor. r; ntes Glied	Fall
+	C r — d; n + δ;	1
—	n — δ;	2
	A h. — r; ntes Gl.	
+	C — r — d; n + δ;	3
—	n — δ;	4
	A h. + r; — ntes Gl.	
+	C r — d; — n + δ;	5
—	n — δ;	6
	A. h. — r; — ntes Gl.	
+	C — r — d; n + δ;	7
—	— n — δ;	8.

Z. E. im 7 Falle ist A in der — rten Horizontalreihe das — nte; und C in der — r — dten Horizontalreihe, das — n + δte Glied, und

wenn

wenn da r = 2; n = 1; d = 1; δ = 3; so ist A = — 2b — m; C = — 3b + 2m; m = ½b; Alle diese Mannichfaltigkeiten aber sind in den Formeln für A und C (636) und für m (638) enthalten, wenn die Zeichen von r; n; δ; nach Erfoderung der Umstände geändert werden, denn d und b, behalten die ihrigen allemahl.

642. Zus. Man stelle sich 36. Fig. (640) umgewandt vor, daß SY zur rechten Hand fällt, und SX sich von der rechten gegen die linke erstreckt, daß also CA; XY; P; D; linker Hand der Linie SY fallen; so hat man die Figur für (641). Hier wird also nur die ganze Figur umgewändt, alle Linien behalten einerley Lage gegen einander, also bleiben alle Schlüsse in 640, und wenn man sich der Buchstaben zur Rechnung bedienen will, darf man nur acht geben, wie diesen Buchstaben Zeichen nach 641. müssen geändert werden. Nun ändern sich PD; SA; nicht, aber PW; wird (n — λ). ML weil PW jezo nicht mehr des Punctes P Entfernung von MO, weniger AG; sondern AG weniger der Entfernung des Punctes P ist, indem des Punctes P Entfernung nicht so viel als AG beträgt. Auch ist CS nicht CH — GA sondern GA — CH; also = δ. ML; weil CH = (n — δ): ML. Daher ist SY = (l — r + d + (n — λ) d: δ). MK; und wenn man SY > SA sezt, so folgt l — λd: δ > r — nd: δ; und weil m = — bd: δ ist A = (r — nd: δ) b und P = (l — λd: δ) b; also wieder P > A. Wird also das Linial

aus

aus dieser Lage parallel bewegt, so kömmt es bey fortgesetzter Bewegung immer an gröſſere bejahte Werthe, oder an kleinere verneinte.

Es sey $A = 2m + b$; $C = m - b$; also $m = -2b$; und $A = C = -3b$; In den folgenden Lagen kömmt das Linial an $-2b$; m; $2m + 2b$; darnach an $-b$; $m + b$; $2m + 3b$; darnach an $-m - 2b$; 0; $m + 2b$; darnach an $-m - b$; b; $m + 3b$; darnach an $-m$; $2b$; $m + 4b$; endlich an $-m + b$; $3b$; $m + 5b$; und die Werthe, an die es zugleich kommt, sind $-3b$; $-2b$; $-b$; 0; $+b$; $+2b$; $+3b$;

643. Zus. Wenn das Linial in (640) wo C rechter Hand von A aus liegt, von der rechten nach der linken zu bewegt wird, so kömmt es an kleinere bejahte, oder gröſſere verneinte Werthe; eben das begegnet ihm, wenn es in (642) wo A rechter Hand von C aus liegt, von der linken nach der rechten zu bewegt wird. In beyden Fällen also kömmt das Linial an gröſsere Werthe, wenn es nach oben zu, und an kleinere, wenn es nach unten zu bewegt wird.

644. Zus. Wenn zwey Glieder einer wagrechten Reihe, z. E. $m + 5b = 2m + 5b$ gleich gesetzt werden, woraus $m = 2m$ folgt, so darf man nicht mit m dividiren, weil darnus die Ungereimtheit $r = 2$ folgen würde; Sondern $m = 2m$ zeigt an, daß $m = 0$; Dieses gilt also, so oft als Glieder in einer wagrechten Reihe einander gleich gesetzt werden.

645.

645. Lehns. Die Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Rx^{m+rd}$ wo m jede bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochene Grösse, und d einen beständigen Unterschied der Reihe der Exponenten bedeutet, heisse der Kürze wegen ⊙. Die grossen Buchstaben sind Coefficienten dieser Reihe. A heisst der erste, die übrigen alle heissen folgende. Ich sage, wenn diese Reihe auf eine Potenz von einem ganzen bejahten Exponenten k; erhoben wird, so folgen die Exponenten von x in dieser Potenz, so nach einander, daß der erste mk ist, und die folgenden mit ihnen in einer arithmetischen Reihe sind, deren Unterschied dk ist.

Bew. I) Weil $y = x^m \cdot (A + Bx^d + Cx^{2d} \ldots + Rx^{rd} \cdots)$ so suche man die Folge der Exponenten von x (denn von keinen andern ist hier die Rede) in dem zweyten Factor, den ich ♂ nennen will; Man heisse seine ersten beyden Glieder $A + Bx^d = \alpha$ die ersten drey $\alpha + Cx^{2d} = \beta$; u. s. w. die ersten r zusammen, unter denen das letzte $(r - 1)$ d zum Exponenten hat, φ;

II) Nun sind die Exponenten in α; 0; d; 2d; 3d; .... kd (141).

III) Wenn die Exponenten für jede Potenz von den ersten r Gliedern in dieser Reihe 0; d; 2d; ... fortgehen, oder wenn φ auf jede Potenz erhoben, eine Reihe von Exponenten hat, die

die lauter Vielfache von d sind, so hat $\varrho + Rx^{rd}$ auf die Potenz k erhoben, eben dergleichen Reihe von Exponenten, oder die Exponenten in der Potenz k der ersten r + 1 Glieder sind auch lauter Vielfache von d; denn vermöge (141) ist von $(\varrho + Rx^{rd})^k$ das e + 1te Glied; die Binomialcoefficienten (141), weil sie hier nicht nöthig sind, nicht betrachtet, $\varrho^{k-e} . R^e x^{erd}$; Da nun vorausgesetzt wird, ϱ^{k-e} sey eine Reihe, wo die Exponenten lauter Vielfache von d sind; und da jedes Glied von dieser Reihe, mit einer Potenz von x multiplicirt wird, deren Exponent erd auch ein Vielfaches von d ist, so ist der Exponent jedes solchen Products, die Summe zweyer Vielfachen von d; also auch ein Vielfaches von d.

V) Die Voraussetzung (IV) ist für r = 2 wahr, also ihre Folge für die ersten drey Glieder. Und diese Folge als die Voraussetzung für r = 3 angenommen, giebt eben eine solche Folge für die ersten vier Glieder, u. s. w. daß also die Potenz k der Reihe ♂ lauter Exponenten hat, die Vielfache von d sind.

VI) Für die Potenz k von y, muß jedes Glied der Potenz k von ♂, durch die Potenz mk von x multiplicirt werden, und der Exponent dieses Productes ist also mk + einen Vielfachen von d; d. i. ein Glied einer arithmetischen Reihe, die sich von mk anfängt, und d zum Unterschiede hat.

reihen eine aus einem Theile, der kein y enthält, so enthält der Coefficient ihres ersten Gliedes kein A; und giebt also in der Gleichung, in welcher man A als die unbekannte Gröſſe ansieht, ein völlig bekanntes Glied. Wenn es mehr als zwo Anfangsreihen geben soll, so müssen die griechischen Buchstaben, die in der Gleichung (648) gegeben sind, so beschaffen seyn, daß einerley Werth von m; die ersten Exponenten aller dieser Anfangsreihen gleich macht.

Man setze die Gleichung, welche A. 631. bestimmt, sie hat drey Glieder; weil es drey Anfangsreihen giebt, die aus y^3; aay: und $-2a3$ entstehen, obgleich die letzte nur ein einigs Glied hat.

653. Erkl. Drey oder mehr Gröſſen a; b; c; sind in einer arithmetischen Reihe, deren Unterschied d was für eine ganze oder gebrochne, bejahte oder verneinte Zahl man will, ist, so daß f; g; ganze bejahte Zahlen bedeuten, und $a + fd = b$; $a + gd = c$; Ich nenne alsdenn d der erwähnten Gröſſen gemeinschaftlichen Unterschied.

654. Erkl. Wenn φ; γ; auch ganze bejahte Zahlen sind, und $a + \varphi\delta = b$; $a + \gamma\delta = c$; aber $\varphi > f$; $\gamma > g$; so sage ich d sey ein gröſſerer gemeinschaftlicher Unterschied als δ; Ist also d so beschaffen, daß f und g für d kleiner sind als φ und γ für jedes andere δ; so ist d der gröſſte gemeinschaftliche Unterschied.

Ex. zu II. Aber eben daselbst kömmt C in aay zuerst bey eben der vorigen Potenz von x vor, ohne in A multiplicirt zu seyn.

647. Zus. Wenn in einer Gleichung ein Product wie $py^{\varkappa} x^{\tau}$ vorkömmt, und in demselben die Reihe ⊙ statt y gesetzt wird, so verwandelt sich dieses Product in eine Reihe, wo R zum erstenmahle in der ersten Abmessung ist die Potenz $m\varkappa + \tau + rd$ von x multiplicirt vorkömmt.

648. Lehns. (24) $py^{\varkappa} x^{\tau} + qy^{\varepsilon} x^{\eta} + ry^{\lambda} x^{\mu} + sy^{\rho} x^{\pi} = o$ kann jede Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen vorstellen;

Jede solche Gleichung enthält Potenzen von x allein, oder von y allein, oder Producte aus Potenzen beyder, oder ein unveränderliches Glied. Die erste Gattung von Gliedern kann man ausdrücken, wenn man $\varkappa$ oder ε oder λ oder $\varrho = o$ setzt; die andere, wenn man τ oder η oder μ oder $\pi = o$ setzt; die dritte kann jedes Glied der hingeschriebenen Gleichung vorstellen; Für die vierte kann man, in welchem Gliede dieser Gleichung man will, z. E. im letzten; zugleich $\varrho = o$ und $\pi = o$ setzen. Auch kann ein Glied, z. E. das dritte, nachdem man für λ und μ verschiedene Werthe annimmt, verschiedene Glieder bedeuten.

649. Zuſ. Wenn man in 4 die Reihe ⊙ (645) ſtatt y ſetzt; ſo gibt jedes Product derer, die zuſammen 4 ausmachen, eine Reihe; ich will die Reihe I die nennen, die aus dem erſten Producte, II die aus dem zweyten entſteht, u. ſ. w. Aus allen dieſen Reihen entſteht eine zuſammengeſetzte Reihe wie C 631; Man könnte ſie die Reihe der Gleichung wie jede der andern, eine Reihe eines Theiles der Gleichung nennen. Hat x in der Reihe eines Theiles der Gleichung eben den Exponenten, den es in der Reihe eines andern Theiles hat, ſo machen die Glieder dieſer beyden oder mehrern Reihen, wenn ſolches bey mehrern Reihen der Theile ſtatt findet zuſammen ein einziges Glied der Reihe der Gleichung aus; deſſen Coefficient alſo aus den Coefficienten der Reihen der Theile beſteht.

Man ſehe das Exempel 631. Für daſſelbe wäre z. E. $p = 1$; $\varkappa = 3$; $\tau = 0$; $q = aa$; $\varepsilon = 1$; $\eta = 0$; und auch, wenn das zweyte Glied der allgemeinen Gleichung (648) noch ein anders, der 631. bedeuten ſoll; $q = -2a$; $\varepsilon = 0$; $\eta = 0$; Ferner $\iota = a$; $\lambda = 1 = \mu$; $\zeta = -1$; $\varrho = 0$; $\pi = 3$;

650. Zuſ. Die erſten Exponenten dieſer Reihen (649) ſind $m\varkappa + \tau$; $m\varepsilon + \eta$; $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$; welche man nähmlich erhält, wenn man der Reihe ⊙ erſtes Glied in die Gleichung ſetzt. Sie gehören den erſten Gliedern der Reihen der Theile

Theile zu. Unter diesen ersten Exponenten setze man ein paar gleich, z. E. $m\varkappa + \tau = m\varepsilon + \eta$; dieses bestimmt $m = (\eta - \tau) : (\varkappa - \varepsilon)$. Ist nun jeder der andern Exponenten $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$; u. s. w. so beschaffen, daß, wenn man $m\varkappa + \tau$ von jeden abzieht, allemahl entweder was Bejahtes, oder was Verneintes herauskömmt, d. i. sind die andern Exponenten alle entweder grösser, oder kleiner als $m\varkappa + \tau$; kann man $m\varkappa + \tau$ den ersten Exponenten der Reihe der Gleichung nennen, und eine Reihe eines Theiles, welche $m\varkappa + \tau$ oder einen eben so grossen Exponenten zum ersten hat, ist eine von den Anfangsreihen der Reihe der Gleichung, dergleichen es also auser II noch mehr giebt, wenn es noch mehr Reihen der Theile gibt, deren erste Exponenten gleich sind. Mit diesen Reihen fängt sich nähmlich die Reihe der Gleichung an; die andern Reihen der Theile fangen sich später an.

651. Zus. Man setze also die ersten Glieder der Anfangsreihen zusammen als das erste Glied der Reihe der Gleichung an; (649) und setze ihre Coefficienten zusammen $= o$, so hat man eine Gleichung, die A bestimmt, denn in kein erstes Glied einer Reihe eines Theiles kömmt ein anderer Coefficient der Reihe $\odot$ als A.

652. Zus. A kann durch eine höhere Gleichung bestimmt werden. Z. E. nach (648) wäre $pA^{\varkappa} + qA^{\varepsilon} = o$; Entsteht unter den Anfangsrei-

reihen eine aus einem Theile, der kein y enthält, so enthält der Coefficient ihres ersten Gliedes kein A; und giebt also in der Gleichung, in welcher man A als die unbekannte Gröſſe ansieht, ein völlig bekanntes Glied. Wenn es mehr als zwo Anfangsreihen geben soll, so müssen die griechischen Buchstaben, die in der Gleichung (648) gegeben sind, so beschaffen seyn, daß einerley Werth von m; die ersten Exponenten aller dieser Anfangsreihen gleich macht.

Man setze die Gleichung, welche A. 631. bestimmt, sie hat drey Glieder, weil es drey Anfangsreihen giebt, die aus y^3; aay: und $-2a3$ entstehen, obgleich die letzte nur ein einigs Glied het.

653. Erkl. Drey oder mehr Gröſſen a; b; c; sind in einer arithmetischen Reihe, deren Unterschied d was für eine ganze oder gebrochne, bejahte oder verneinte Zahl man will, ist, so daß f; g; ganze bejahte Zahlen bedeuten, und $a + fd = b$; $a + gd = c$; Ich nenne alsdenn d der erwähnten Gröſſen gemeinschaftlichen Unterschied.

654. Erkl. Wenn φ; γ; auch ganze bejahte Zahlen sind, und $a + \varphi\delta = b$; $a + \gamma\delta = c$; aber $\varphi > f$; $\gamma > g$; so sage ich d sey ein gröſſerer gemeinschaftlicher Unterschied als δ; Ist also d so beschaffen, daß f und g für d kleiner sind als φ und γ für jedes andere δ; so ist d der gröſſte gemeinschaftliche Unterschied.

schied. Es ist nähmlich der Unterschied derjenigen arithmetischen Reihe, die unter allen arithmetischen Reihen, in denen sich a; b; c; befinden, die wenigsten Glieder hat.

655. Zus. a; b; c; können die Exponenten $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu = m\varkappa + \tau + fd$; $m\varrho + \nu = m\varkappa + \tau + gd$ bedeuten; so fängt sich die Reihe der Gleichung $\frac{4}{4}$ mit den Reihen I; II; (649; 650; an) die Reihe III aber fängt sich in der Reihe der Gleichung da an, wo der Exponent $m\varkappa + \tau + fd$ ist, d. i. in dem $f + 1$ Gliede der Reihe der Gleichung; und so die Reihe IV in dem $g + 1$ Gliede u. s. w. ist also $f < g$ so fängt sich die Reihe III eher an als IV; und folglich fängt sich nach den Anfangsreihen diejenige Reihe am ersten an, deren erster Exponent vom ersten Exponenten der Anfangsreihen am wenigsten unterschieden ist.

656. Zus. R (647) kömmt in der Reihe III zu erst bey den Exponenten $m\lambda + \mu + rd$ vor, dieser Exponent ist $= m\varkappa + \tau + (f + r)d$ (655) und das Glied der Reihe III. das ihn zum Exponenten hat, macht einen Theil des Gliedes der Reihe der Gleichung aus, das eben den Exponenten hat, (649) also kömmt R in der Reihe der Gleichung, wegen der Reihe III später vor als wegen der Reihe I; da es schon bey den Exponenten $m\varkappa + \tau + rd$ vorkömmt. Also kömmt R wegen der Reihe I; in der Reihe der Gleichung, im $r + 1$ Gliede,

und wegen der Reihe III im $r + f + 1$ Gliede vor. Die Reihen I; II; haben durchgängig einerley Exponenten, weil ihre ersten gleich sind (650) und die Exponenten eine arithmetische Progression ausmachen (645), folglich kömmt in einer R bey eben dem Exponenten vor, bey dem es in der andern vorkömmt, oder R kömmt wegen beyder zuerst in einerley Gliede der Reihe der Gleichung vor. Dieses gilt auch, wenn die ersten Exponenten von mehr als zwo Reihen sind gleichgesetzt worden (652).

Im Exempel 631. sey $R = C$; also $r = 2$; Auch ist da $m = 0$; $d = 1$; was die Reihen I; III; sind, erhellt aus der Anwendung von 649. auf dieses Exempel. Es ist aber $m\varkappa + \tau = 0$; und $m\lambda + \mu = 1$; also $f = 1$ folglich $m\varkappa + \tau + r + 1 = 3$; $m\varkappa + \tau + f + r + 1 = 4$; und C kömmt, wie die dortige Rechnung zeigt, wegen der Reihen I und II zuerst im dritten, wegen der Reihe III zuerst im vierten Gliede der Reihe der Gleichung vor.

657. Lehrs. **Wenn sich die Reihe III. (655) unter allen zuerst nach den Anfangsreihen anfängt, und $f > 1$; so ist $R = 0$.**

Bew. Solchergestalt kömmt R in der Reihe der Gleichung vor, ehe sich irgend eine andere Reihe eines Theiles anfängt (656). Es soll aber so bestimmt werden, daß der Coefficient der Reihe der Gleichung, in welchem es sich zuerst befindet $= 0$ gesetzt wird. Dieser Coefficient

elent besteht weiter aus nichts als aus den Coefficienten der Anfangsreihen, in denne R zuerst vorkömmt (649). In jedem solchen Coefficienten einer Anfangsreihe aber ist R ein Factor (646) folglich ist der Coefficient der Reihe der Gleichung, in welchem R zuerst vorkömmt, ein Product, dessen einer Factor R ist, der andere Factor muß also durch die Binomialcoefficienten und die vorhergehenden Coefficienten der Reihe ⊙ gegeben seyn, wie aus dem Verfahren (631) erhellt. Nun ist R der $x+1$te Coefficient (645), und kömmt auch im $x+1$ Gliede der Reihe der Gleichung zuerst vor (656); vor ihm gehen in der Reihe ⊙, x Coefficienten dieser Reihe her, und diese hat man dadurch bestimmt, daß man x Coefficienten der Reihe der Gleichung nach einander $= 0$ gesetzt hat. Also sind die Coefficienten der Reihe ⊙ welche vor R hergehen, alle schon bestimmt, und folglich kann man den erwähnten Factor, der durch sie gegeben ist, nicht $= 0$ setzen; Unter besondern Umständen könnten zwar die gefundenen Coefficienten so beschaffen seyn, daß sie zusammen diesen Factor $= 0$ machten; aber dieses läßt sich nicht allemahl zum voraussetzen, folglich ist dasjenige, was man überhaupt annehmen darf um das Product $= 0$ zu machen, daß man $R = 0$ setzt, welches auch alsdenn frey stehen muß, wenn der andere Factor durch das Verhalten der schon bestimmten Grössen gegen einander von sich selbst $= 0$ würde; denn wenn nur

soviel gesagt ist, daß ein Product $= 0$ seyn soll, so ist es allemahl verstatter jeden Factor, welchen man will, $= 0$ zu setzen, obgleich nicht umgekehrt folgt, daß jeder Factor $= 0$ seyn muß. Hier aber ist R noch unbestimmt, und man kann es also auf jede Art bestimmen, die den vorhergehenden Bestimmungen nicht widerspricht, folglich darf es allemahl $= 0$ seyn.

658. Zus. Also ist unter diesen Umständen $y = Ax^{m+\mathfrak{f}} + Sx^{m+fd}$ und alle Coefficienten zu Potenzen, zwischen m und $m + \mathfrak{fd}$; sind $= 0$; weil r unbestimmt angenommen wird. Es kömmt nähmlich S zuerst wegen der Reihe I im $\mathfrak{f} + 1$ Gliede der Reihe der Gleichung vor (656); und da fängt sich die Reihe III an (655) in deren ersten Gliede S noch nicht ist (651), folglich ist das, was in diesem Gliede zusammen $= 0$ gesetzt wird, um S zu bestimmen, kein Product, von welchem S ein Factor wäre, daher die Schlüsse 637. wegfallen.

659. Exempel. Es sey $x^3 - aay + yyx + y^3 = 0$; und man setze $y = Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 \ldots$ so ist nach 648; $p = 1$; $\varkappa = 0$; $\mathfrak{r} = 3$; $q = -aa$; $\varepsilon = 1$; $\eta = 0$; $\mathfrak{s} = 1$; $\lambda = 2$; $\mu = 1$; $\mathfrak{f} = 1$; $\xi = 3$; $\pi = 0$; auch $m = 3$; $d = 2$ also wird die Reihe

$$\begin{aligned} \text{I} &= \Big\} x^8 \\ \text{II} &= -aaA \Big\} - aaBx^5 - aaC \Big\} x^7 \\ \text{III} &= \qquad\qquad + AA \Big\} \\ \text{IV} &= \qquad\qquad\qquad\qquad + A^3 x^3 \end{aligned}$$

Sucht

Sucht man hier y nach (631) so ist $A = -1 : aa$ und $-aaB = 0$; und $C = 1 : a^6$; Es ist nähmlich $m\varkappa + \tau = 3 = m\varepsilon + \eta$; und $m\lambda + \mu = 7 = 3 + 4$ also $fd = 4$; folglich $f = 2$; daher gehört der erste wirkliche Coefficient der Reihe ⊙ zur Potenz $m + 2d$ oder 7; und R 657. ist hier $B; r = 1$;

660. Aufg. Zu entscheiden, unter was für Umständen, A, B, C, ... R nur eine oder mehr Werthe haben können.

Aufl. I. Daß A mehr als einen Werth haben kann, erhellt aus 652;

II. Jede der übrigen Grössen; R; kömmt in der Gleichungsreihe, eher in den Anfangsreihen vor als in den andern (656) und wo sie in den Anfangsreihen zuerst vorkömmt, hat sie nur die erste Abmessung (647).

III. Wo R zum erstenmahle auf die in II. erwähnte Art vorkömmt, wird es mit einem gewissen Factor multiplicirt seyn. Dieser Factor ist entweder $= 0$; oder nicht.

IV. Er sey nicht $= 0$: So macht das Product aus ihm in R; nebst andern beständigen Grössen, einen gewissen Coefficienten der Gleichungsreihe: den man $= 0$ setzt. Es ist also $p.R + q = 0$ wo p und q durch Coefficienten der Gleichung selbst, und durch solche Grössen A, B, C, .. die vor R in der Reihe für y vorhergehen gegeben sind: Also ist $R = -\frac{q}{p}$ und hat nur einen Werth.

Im

Im Exempel 631; sey $R = D$; so ist $p = 3AA + aa$; $q = B^3 + 6ACB + a^2C - 1$;

V. Wenn aber $p = 0$; so ist entweder zugleich $q = 0$, oder nicht.

VI. Es sey $q = 0$; so erhellt daß der Coefficient der Gleichungsreihe $p.R + q = 0$ wird, ohne R zu bestimmen. Ob, und wie also R bestimmt wird, das kömmt auf die folgenden Glieder der Gleichungsreihe an, in denen R höhere Abmessungen hat. Alsdenn kann also R mehr Werthe bekommen, ja wohl gar unmögliche.

Ex. Man sehe $y = A + Bx + Cx^2 - -$ in folgender Gleichung die linker Hand des Gleichheitszeichens in einer Columne steht:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
a^3 & = & a^3 & & & & \\
-2aay & = & -2aaA & -2aaBx & +2aaCx^2 & . & - \\
+ayy & = & +aAA & +2aAB & +aBB & & \\
 & & & & -2aAC & & \\
+xxy & = & & & +A & & \\
+x^3 & = & & & & & +x^3 \\
\hline
0 & = & 0 & & & &
\end{array}
$$

So wird $AA - 2aA + aa = 0$; oder $A = a$; daher der Gleichungsreihe zweyter Coefficient $(2aa - 2aa).B$; ist also hier $R = B$; so ist $p = 0$ und auch $q = 0$ aus diesem Coefficienten der Gleichungsreihe also bliebe B unbestimmt.

Der dritte aber wird $(2aa - 2aa).C + aBB + a = 0$ also $BB = -1$; Hier wird also B unmöglich.

VII.

VII. Dieß Exempel zeigt also daß folgende Coefficienten der Reihe für y unmöglich werden können, wenn gleich der erste möglich ist; und daß man also nicht allemahl schliessen darf, die Reihe für y, und der Werth den sie giebt sey möglich, weil ihr erster Coefficient möglich ist.

VIII. Wäre nicht $q = o$; so hätte man die Gestalt der Reihe für y unrichtig angenommen (629), Sie muß nähmlich so angenommen werden, daß jeder Coefficient der Gleichungsreihe $= o$ seyn kann: Ob dieses zu erhalten unmögliche Werthe von A, B, ... nöthig sind oder nicht, daran ist nichts gelegen; denn da nur das erfodert wird, daß jeder Coefficient der Gleichungsreihe, eine bestimmte Gleichung giebt, so ist es nichts ungereimtes wenn diese bestimmte Gleichung unmögliche Wurzeln hat.

Wäre in der Gleichung des Exempels V; noch das Glied $+ bbx$, und man hätte eben die vorige Reihe für y behalten, so bekäme der Gleichungsreihe zweytes Glied den Coefficienten $o. B + bb$. Es kann aber nicht $bb = o$ seyn. Also führte diese Reihe für y auf eine Ungereimtheit.

IX. Hat R (ein Coefficient der Reihe für y, oder der Reihe ⊙) unterschiedene mögliche Werthe, so giebt jeder dieser Werthe, eine eigene Fortsetzung der Reihe ⊙; die sich daselbst in unterschiedene, welche einen gemeinschaftlichen Anfang haben, gleichsam spaltet, bis dahin irregu-

reguläre Glieder hat, und von da an ordentlich wird, wo jeder Coefficient nur einen Werth hat. Diese Ausdrückungen sind Cramers Analyse des Courbes §. 104; 109.

Exempel. Für $x^3 - x^2 y + a y^2 - 2a^2 y + a^3 = 0$ setze man $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 \ldots$ so finden sich der Reihe, welche herauskömmt, wenn man ⊙ statt y in die Gleichung setzt, ihre Coefficienten zu den Potenzen 0; 1; 3; 4; 5; 6; u. s. w. folgender gestalt. I) $aAA - 2aaA + a^3$; daraus sich $A = a$ findet. II) $-2aB + 2aB$; III) $-2a^2 C + aB^2 + 2a^2 C - a$; IV) $-2a^2 D + 2aBC + 2a^2 D - B + 1$; V) $-2a^2 E + aC^2 + 2aBD + 2a^2 E - C$; VI) $-2a^2 F + 2aCD + 2aBE + 2a^2 F - D$; VII) $-2aaG + aDD + 2aCE + 2aBF - 2aaG - E$; folglich findet sich III $= 0$ gesetzt; $B = \pm 1$ und es giebt also zwo Reihen für y, nachdem man das obere oder das untere Zeichen gebraucht.

Bey dem Gebrauche des obern Zeichens wird aus IV; $2aC = 0$ also $C = 0$; folglich auch E; F; G; u. s. w. $= 0$; welches $y = a + x$ giebt; und dieses ist also hier der völlige Werth von y, welcher der Gleichung auch genug thut.

Bey dem Gebrauche des untern Zeichens, wird aus IV; $-2aC + 2 = 0$; $C = \frac{1}{a}$; ferner $D = 0 = E \ldots$, oder $y = a - x + \frac{xx}{}$:

$x = a$ welches wiederum der völlige Werth von x ist, der der Gleichung genug thut.

661. Zus. Von der Beschaffenheit der Grössen A, B .. R läßt sich nichts allgemeines behaupten, weil solche auf den Coefficienten der Gleichung beruht.

662. Lehrs. **Die Exponenten der Reihe der Gleichung machen eine arithmetische Progression aus, deren erstes Glied $mx + r$; der Unterschied d ist.**

Bew. Die Exponenten der Anfangsreihen (650) machen eine solche Progression (545), fänden nun die Exponenten der andern Reihen in dieser Progression nicht statt, so könnte man keine Glieder dieser Reihen nach 649. zu Gliedern der Anfangsreihen setzen, um aus ihnen zusammen Glieder der Reihe der Gleichung zu machen. Weil man also annimmt, daß jeder Coefficient der Reihe der Gleichung $= 0$ seyn soll, so müssten die Coefficienten dieser andern Reihen für sich $= 0$ seyn, ohne daß etwas aus den Anfangsreihen zu ihnen käme. Aber in ihnen kommen ebenfalls A; B; C; u. s. w. eben so nach einander vor, wie in den Anfangsreihen, nur später (651; 656;) Also würde man aus ihnen A; B; C; u. s. w. von neuen bestimmen, die doch schon vorhin vermittelst der Anfangsreihen bestimmt waren, und zwar so, daß jedes auser A nur einen einzigen Werth haben kann (660).

663.

663. Zuſ. d muß ein gemeinſchaftlicher Unterſchied (653) der Gröſſen $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu$; $m\varrho + \pi$ u. ſ. w. oder der erſten Exponenten aller Reihen der Theile (650) ſeyn; woraus alsdenn folgt, daß es auch ein gemeinſchaftlicher Unterſchied aller Exponenten dieſer Reihen der Theile iſt (645). Die Gröſſen, welche die griechiſchen Buchſtaben andeuten, ſind in der Gleichung ſelbſt gegeben, und m wird nach 650. beſtimmt.

664. Lehrſ. Soll die Potenz von x die ſich in jedem Gliede der Reihe ⊙ befindet, in Vergleichung mit der, die ſich im nächſtvorhergehenden befindet, ſo wenig als möglich betragen, und alſo die Reihe ſich ſo ſchnell als möglich nähern (12), ſo muß man d ſo groß als möglich, und alſo dafür den gröſſten gemeinſchaftlichen Unterſchied (654) der Gröſſen $m\varkappa + \tau$; $m\lambda + \mu$ u. ſ. w. nehmen.

Bew. Wenn S den Coefficienten, der in 645 nach R folgt, bedeutet, ſo gibt das Glied, das dorten zuletzt hingeſchrieben iſt, mit dem nächſtfolgenden dividirt $\frac{R}{S} \cdot x^{-d}$ Bey dieſem Quotienten ziehe man nur x und nicht die Coefficienten in Betrachtung. Wenn d eine bejahte Gröſſe und — d eine verneinte bedeutet, ſo iſt x ein eigentlicher Bruch (12) und folglich x^{-d} oder $1 : x^{d}$ ein uneigentlicher der deſto gröſſer, je kleiner der Diviſor, d. i. je höher die Potenz

d die

d dieſes eigentlichen Bruches iſt (Ar. I. 76.). Bedeutet aber d eine verneinte und — d eine bejahte Zahl, ſo muß x eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch ſeyn, wovon die Potenz des bejahten Exponentens — d wieder deſto gröſſer iſt, je gröſſer dieſer bejahte Exponent iſt. In beyden Fällen iſt alſo das folgende Glied deſto weniger in Vergleichung mit dem vorhergehenden beträchtlich, je gröſſer d iſt.

665. Aufg. Bey einer rationalen Gleichung, die zwo veränderliche Gröſſen enthält, die Geſtalt der Reihe (628) oder m und d (645) zu finden.

Aufl. I) Man ſetze Ax^m ſtatt y in die Gleichung; ſo verwandelt ſie ſich in einen Ausdruck, der nur x auf verſchiedene Potenzen erhoben enthält.

II) Die Exponenten dieſer Potenzen ordne man wie die Vielfachen von m und b (636) hier nähmlich iſt $b = 1$;

III) Durch ein Paar der äuſerſten ſo geordneten Exponenten lege man das Linial (636).

IV) Soll die Reihe ſteigen (2), ſo wähle man dazu ein paar der unterſten Exponenten, das heiſſt, ein Paar, die ſo liegen, daß das Linial keine mehr antrifft, wenn es wie in 643. nach unten zu bewegt wird.

V) Soll ſie fallen, ſo wähle man ein Paar der oberſten.

VI) Man setze sie gleich, und bestimme daraus m wie in (650) geht das Linial zugleich durch mehr äuserste Exponenten, so wird einerley Werth von m, sie alle gleich machen.

VII) Dieses gefundene m setze man in die übrigen Exponenten.

VIII) Man suche den grössten gemeinschaftlichen Unterschied der Werthe, welche herauskommen. Er wird d seyn.

IX) Die Coefficienten werden nach 631. bestimmt.

Exempel. Aus $y^3 + aay - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ wird vermöge I. ein Ausdruck, wo x folgende Exponenten nach der Ordnung, in welcher die Glieder der Gleichung stehen, bekömmt: 3 m; m; 0; m + 1; 3; welche man so ordnen muß (II)

3
*
* m + 1
0 m * 3 m

Für eine steigende Reihe (IV) giebt (III) $0 = m = 3m$ also nach (VI) $m = 0$ (644); die Werthe (VIII) sind 0; 1; 3; ihr grösster gemeinschaftlicher Unterschied $1 = d$; also die Reihe $y = A + Bx + Cx^2 \ldots$ Newton aus dessen Method of Flux. Introd. §. 36. dieses Exempel genommen ist, findet $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$

Für

Für eine fallende Reihe (V) ist $3m = 3$; also $m = 1$; die Werthe VIII sind 3; 1; 2; 0; also $d = -1$ und $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} \ldots$ u. s. w. Hier werden die Anfangsreihen (650) aus dem ersten und letzten Theile der Gleichung; Ich schreibe sie hier beyde zu oberst, und darunter nach der Ordnung, was aus dem zweyten, dritten, vierten Theile wird.

$$\left.\begin{array}{l} A^3 \\ -1 \end{array}\right\} x^3 + 3AABx^2 + 3ABBx + B^3$$
$$+ 3AAC + 6ABC$$
$$+ 3AAD$$
$$+ aaA + aaB$$
$$- 2a^3$$
$$+ aA + aB + aC$$

Folglich ist $A = 1$; nebst zween unmöglichen Werthen; $B = -\frac{1}{3}a$; 3. $\frac{1}{9}aa + 3C + aa - \frac{1}{3}aa = 0$ oder $C = -\frac{1}{3}aa$; $D = \frac{5}{81}a^3$ u. s. w.

Bew. Wenn man nach 649. verfährt, so enthält das erste Glied der Gleichungsreihe, lauter Theile, die nur durch A und bekannte Grössen gegeben werden (650), also gibt das Verfahren I. gewiß alle ersten Glieder der Anfangsreihen (650) und dabey noch erste Glieder anderer Reihen, welche sich von jenen dadurch unterscheiden, daß ihre Exponenten alle grösser oder kleiner sind (650). Wenn aber für gegenwärtige Anwendung in 636; $b = 1$; so werden alle Exponenten nach III grösser und nach V. kleiner als die äussersten (643), folglich ge-

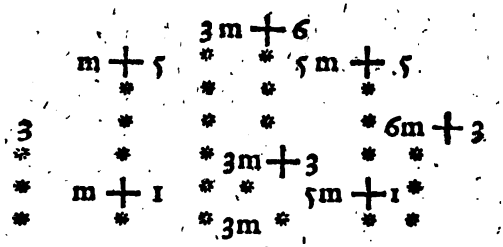
den IV; V; die ersten Exponenten der Anfangsreihen, und der Werth von m der daraus bestimmt wird, daß man ein Paar der äußersten gleich gesetzt hat, macht alle gleich, die zugleich äußerste sind, d. i. durch welche das Linial zugleich geht (638), wie VI. erfodert.

Die übrigen Exponenten sind die ersten solcher Reihen, die nicht die Anfangsreihen sind (650), und sollen sich alle mit den ersten der Anfangsreihen in einer arithmetischen Progression befinden (662). Ihre Werthe sind durch die Exponenten, welche x und y in der Gleichung haben, und durch das nur gefundene m gegeben (636), und Werthe, an welche das Linial zugleich trifft, sind gleich (638). Man muß also den Unterschied einer arithmetischen Progression suchen, in welcher sich alle diese Werthe befinden können; und 664. zeigt den Grund von VIII.

666. Zweytes Exempel. $y^6 x^3 - \frac{y^5 x^5}{a} + x^6 y^3 - a^3 x^5 y + a^6 x^3 - a^7 xy + a^6 y^3 - a^3 xy^5 + a^3 x^3 y^3 = 0$; gibt nach 665. I. folgende Exponenten; in der Ordnung, wie die Glieder stehen, $6m + 3$; $5m + 5$; $2m + 6$; $m + 5$; 3; $m + 1$; $3m$; $5m + 1$; $3m + 3$; die nach II. so geordnet werden:

I

$3m + 6$



Hier kann man folgende Bestimmungen machen:

Für aufsteigende Reihen.

α) $6m + 3 = 5m + 1$; $m = -2$; die Werthe der Exponenten; -9; -6; -5; $d = +1$; $A^6 - a^3 A^5 = 0$; $A = a^3$; der Werth $A = 0$ gilt hier nicht.

β) $5m + 1 = 3m$; $m = -\frac{1}{2}$; die Werthe $-1\frac{1}{2}$; 0; $+\frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2}$; $-a^3 A^5 + a^6 A^3 = 0$; $A = \pm\sqrt{a^3}$.

γ) $3m = m + 1$; $m = \frac{1}{2}$; die Werthe; $1\frac{1}{2}$; 3; $3\frac{1}{2}$; ... $d = \frac{1}{2}$; $-a^7 A + a^6 A^3 = 0$; $A = \pm\sqrt{a}$;

δ) $m + 1 = 3$; $m = 2$; die Werthe 3; 6; 7 ... $d = 1$; $a^6 x^3 - a^7 A = 0$; $A = 1 : a$;

Für fallende Reihen.

ε) $6m + 3 = 5m + 5$; $m = 2$; die Werthe 15; 12; 11; $d = -1$ $A^6 - A^5 : a$; $A = 1 : a$;

ζ) $5m + 5 = 3m + 6$; $m = \frac{1}{2}$ die Werthe $7\frac{1}{2}$; 6; $5\frac{1}{2}$; ... $d = -\frac{1}{2}$ $-A^5 + A^3 = 0$ $A \pm \sqrt{a}$;

θ) $3m + 6 = m + 5$; $m = -\frac{1}{2}$; die Werthe $4\frac{1}{2}$; 3; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0; ... $d = -\frac{1}{2}$; $A^3 - a^3 A$; $A = \pm a\sqrt{a}$;

η) $m + 5 = 3$; $m = -2$; die Werthe 3; 0; -1; ... $d = -1$; $-a^3 A + a^6 = 0$; $A = a^3$;

667. Zuſ. Jedem x gehören ſoviel Werthe von y zu, ſoviel y Abmeſſungen hat (223). Da nun jedes x in jede Reihe geſetzt nur einen Werth von y geben kann; ſo folgt ſchon hieraus, daß dieſe Methode ſoviel ſteigende, auch ſoviel fallende Reihen geben muß, ſoviel y Abmeſſungen hat. Im Exempel 666 giebt es ſechs Werthe von A für ſteigende Reihen, zween aus α; δ; vier aus β; γ; wie auch ſechs Werthe von A für fallende Reihen; zween aus ε; η; vier aus ζ; θ; Jeder Werth von A, beſtimmt andere B; C; und giebt alſo eine andere Reihe.

668. Zuſ. Folgende Betrachtungen zeigen, wie ſolches aus der Methode flieſſt. Wenn ein Paar äuſerſte Exponenten $m\alpha + \beta = mx + \tau$ einander gleich geſetzt werden, ſo giebt dieſes nach 665. I. IX; für A eine Gleichung, wo die Potenzen von A folgende α; x; ſind; Befinden ſich äuſerſte Exponenten in der geraden Linie, die alle übrigen Exponenten auf einer Seite liegen hat, ſo ſey $m\alpha + \beta$ der höchſte in dieſer Linie, $mx + \tau$ der niedrigſte; alſo unter denjenigen Theilen der Gleichung, welche die Anfangsreihen geben, der höchſte, welcher

die

die Potenz α von y; der niedrigste, welcher die Potenz x hat, man beurtheilet ihre Höhe hier nur nach y nicht nach x; weil man y eigentlich als die unbekannte Grösse ansieht, die durch x gefunden wird. Solchergestalt hat A in der Gleichung, wodurch es bestimmt wird, allemahl $\alpha - x$ Werthe.

669. Zus. Nun habe überhaupt die höchste Potenz von y die in der Gleichung befindlich ist, den Exponenten α; und sey in die Potenz β von x multiplicirt. Es muß in der Gleichung auch Glieder geben, die kein y enthalten, denn sonst liessen sich alle Glieder mit x^{β} dividiren. Unter diesen Gliedern enthalte dasjenige, das die niedrigste Potenz von x enthält, die Potenz γ; Man kann die Gleichung, wenn sie auch x irgendwo in einem Divisor hätte, allemahl nach (192. I.) in eine verwandeln, wo nirgends x im Divisor ist; also kann man allemahl annehmen, γ sey entweder bejaht, oder $= 0$ wenn sich ein ganz beständiges Glied in der Gleichung befindet. Dieses zum voraus gesetzt, ordne man die Exponenten, wie sie aus der Gleichung nach 665. I; entstehen; nach 665. II; Keiner kann rechter Hand des Exponentens $m\alpha + \beta$, oder so liegen, daß eine Linie von $m\alpha + \beta$ nach ihm zugezogen, nach der rechten Hand von $m\alpha + \beta$ ginge; weil die Vielfachen von m nach der rechten Hand zu wachsen, und α der höchste Exponent von y; folglich $m\alpha$ das grösste Vielfache von m ist.

Da auch vorausgesetzt wird, daß alle Potenzen von y in der Gleichung bejahte Exponenten haben, so giebt es keine Vielfache von m durch verneinte Zahlen, folglich liegt kein Exponent unter den geordneten linker Hand von γ. Nun mag die Gleichung soviel äusere Exponenten geben als man will, die sich folgendergestalt vorstellen lassen:

$$\gamma$$

$$m\alpha + \beta$$

$$m\lambda + \mu$$

$$m\varkappa + \tau$$

Ein Linial durch jedes Paar der hier hingeschriebnen Exponenten gelegt, hat also allemahl alle übrigen Exponenten nicht nur die hier hingeschriebenen, auf einer Seite. Ich nehme noch an, daß in der geraden Linie durch ein Paar solche Exponenten allemahl einer der höchste, der andere der niedrigste, ist (668) oder daß alle übrigen Exponenten, die zugleich mit diesem Paare in eine gerade Linie fallen, zwischen dieses Paar fallen. Nun kann man folgende Lagen des Linials annehmen:

	giebt Werthe für A
$m\alpha + \beta = m\varkappa + \tau$	$\alpha - \varkappa$
$m\varkappa + \tau = m\lambda + \mu$	$\varkappa - \lambda$
$m\lambda + \mu = \gamma$	λ

Wenn man also durch alle Paare äuserster Exponenten herumgeht, so erhellt, daß die Werthe

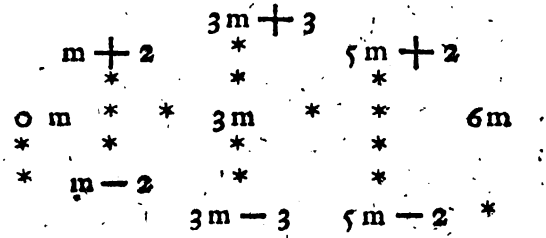
the von A, die sich aus allen zusammen geben; $\alpha - \varkappa + \varkappa - \lambda + \lambda = \alpha$ seyn werden, d. i. soviel, soviel Einheiten der Exponent der höchsten Potenz von y hat. Diese Schlüsse gelten, die äussersten Exponenten mögen die untersten oder obersten seyn, und beweisen also die Sache einmahl für die steigenden und einmahl für die fallenden Reihen.

Anm. Unter diesen Werthen von A, können auch gleiche seyn, die, einer und der andere eben dieselbe Reihe gäben. In diesem Falle wird einer der folgenden Coefficienten mehr als einen Werth bekommen.

So verhält es sich in dem Exempel 660; IX; y hat in der dasigen Gleichung für jedes x zweene Werthe; aber A bekömmt zweene gleiche Werthe, daher bekömmt B zweene ungleiche Werthe, deren jeder einen eigenen für y giebt.

670. Zus. Die Voraussetzung, daß x lauter bejahte Exponenten haben soll, ist allemahl möglich, aber nicht nothwendig. Denn die Schlüsse, welche sich auf 648. beziehen, und die Gründe dieses Verfahrens enthalten, setzen nirgends zum voraus, daß τ; η; μ; π; lauter bejahte Zahlen sind. Von den Exponenten von y muß ich dieses hier annehmen, weil sich das Verfahren auf den binomischen Lehrsatz gründet, den ich bisher nur unter solchen Einschränkungen erwiesen habe (141).

671. Exempel. Die Gleichung 666. lieſſe ſich auch ſo ausdrücken:
$y^6 - y^5 x^{2-a} + x^3 y^3 - a^3 x^2 y + a^6 - a^7 y x^{-2} + a^6 x^{-3} y^3 - a^3 y^5 x^{-2} + a^3 y^3 = 0$; da ſähen die geordneten Exponenten ſo aus



Da gäbe es folgende Lagen des Linials, für ſteigende Reihen, α) $6m = 5m - 2$; β) $5m - 2 = 3m - 3$; γ) $3m - 3 = m - 2$ δ) $m - 2 = 0$;

Für fallende Reihen ε) $6m + 5m + 2$; ζ) $5m + 2 = 3m + 3$ θ) $3m + 3 = m + 2$; η) $m + 2 = 0$

Dieſe Gleichungen ſind mit denen einerley, welche mit eben den griechiſchen Buchſtaben 666. ſind genannt worden, und geben folglich eben die Werthe für m; d; A; jede Gleichung 666. verwandelt ſich in die ihr gleichgültige hier, wenn man auf jeder Seite von ihr 3 abzieht, ſo wie die Gleichung zwiſchen x und y; 666. ſich in die gegenwärtige verwandelt, wenn man alle ihre Glieder mit x^3 dividirt.

672.

672. Zuſ. Wenn es eine endliche Reihe für y giebt, ſo findet man ſie auch auf dieſe Art. Es ſey $(y - a + xx : b).(yy - xy + xx) = yy + (xx + ax - x^3 : b)y - ax^2 + x^4 : b = 0$; die Exponenten ſtehen ſo

4		
* m + 3		
2m + 2	2m + 2	
* m + 1	2m + 1	
* *	2m	3m

Setzt man hier $2m = 3m$ oder $m = 0$; ſo werden die Werthe der Exponenten $0; 1; 2; \ldots$ und $d = 1$; und $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ Da findet man denn $A = a; B = 0; C = -1 : b$ und D mit allen folgenden Coefficienten $= 0$; wie der erſte Factor erfodert. Will man verſichert ſeyn, daß die Reihe ſolchergeſtalt abbrechen (abrumpi) ſoll; ſo iſt nicht genug, daß etwa ein Coefficient von ihr $= 0$ wird, wie hier ſchon mit B geſchahe, ſondern man muß aus der Beſchaffenheit der Gleichung ſehen können, daß ſich dieſes mit allen folgenden Coefficienten ereignen muß. Man kann auch den gefundenen Werth ſtatt y ſetzen, zu ſehen, ob er der Gleichung völlig genug thut.

673. Zuſ. Giebt es für jedes x: unmögliche y; ſo kann es nicht ſoviel mögliche Reihen geben, ſoviel Abmeſſungen y hat. Alsdenn können Werthe von A unmöglich werden, und dieſe geben Reihen für die unmöglichen Werthe von y. Weil es nun ſoviel ſteigende, und ſoviel

wovon die Urſache in 664. liegt, damit man auch unten 680. vergleichen kann. Aber dieſe beyden §. §. ſetzen zum Voraus, daß jeder Coefficient der Reihe y, aus dem Coefficienten der Gleichungsreihe beſtimmt wird, wo er zum erſtenmahle vorkömmt, (man ſ. 656; 657.) und daß man allemahl die ſchon beſtimmten Coefficienten der Reihe y braucht, die folgenden zu beſtimmen. Dieſe Vorausſetzungen können in Fällen die 660; 661; anzeigen, irrig ſeyn. Wenn in einem Coefficienten der Gleichungsreihe, dasjenige, was den Coefficienten der Reihe y der aus ihm beſtimmt werden ſollte, enthält, ſich für ſich ſelbſt aufhebt, (wie — 2B + 2AB in IV.) ſo muß das übrige (wie A daſelbſt) entweder für ſich = o ſeyn, da denn der Coefficient der Reihe y unbeſtimmt bleibt, oder die Vorausſetzung, daß der ganze Coefficient der Gleichungsreihe = o ſeyn ſoll, findet nicht ſtatt, und alſo läſſt ſich das, was 656; 657; voraus ſetzt, da nicht anbringen, daher denn die Regel 665; VIII. hier wegfällt. Uebrigens ſind die Werthe der Fächer (665; VI; VII;) in IV; folgende $2m = m + 1 = 2$ und $m + 2$ welches 3 giebt. Alſo kann man für die Reihe der Exponenten jede annehmen, in der die Zahlen 2 und 3 enthalten ſind, folglich auch die Reihe 1; $1\frac{1}{2}$; 2; welches eben die iſt, die man in VI. findet. Folglich giebt das Parallelogramm auch dieſe Reihe an, wenn man die Regel 665; VIII. hier beyſeite ſetzt, die wie

680.

Werthe von x unmöglich, wie zur Näherung der Reihe erfodert werden. Für die andern beyden Fälle, $2 = m$, $m = 2m$; bekömmt man zwo mögliche Reihen, weil sie sich nähern, wenn $x < a$.

675. Zus. I. Ob Werthe von A aus der Ursache 673. oder aus der 674. unmöglich werden, läßt sich daraus beurtheilen, ob gleich viel Werthe von A für steigende und für fallende Reihen unmöglich sind (673) oder nicht (674).

II. Es können aber Werthe von A möglich seyn, und doch Reihen unmöglich werden von denen sie die ersten Coefficienten sind, wenn nähmlich folgende Coefficienten unmöglich werden.

Aus der Gleichung 660; VI. findet man $y = (2aa - xx \pm \sqrt{(-4aaxx - 2ax^3 + x^2)}) : 2a$ welches unmöglich wird, wenn die Gröſſe unter den Wurzelzeichen verneint wird, oder auch wenn $-4a^2 - 2ax + x^2$ verneint wird; und dieses geschieht für alle bejahte und verneinte Werthe von x die zwischen $a(1 + \sqrt{5})$ und $a(1 - \sqrt{5})$ fallen. Daher giebt es hier keine steigende Reihen, weder für bejahte noch für verneinte x (674); und weil der Werth von A die Unmöglichkeit der steigenden Reihen nicht anzeigt, so wird B unmöglich.

III. Wenn aber m oder d ein Bruch ist, dessen Nenner eine gerade Zahl ist, und also in der Reihe für y, Wurzeln von geraden Exponenten auszuziehen vorkommen; so können Glieder der Rei-

Reihe, die für einen gewissen Werth von x möglich sind, für den gleichen und entgegengesetzten Werth unmöglich seyn. Dergleichen Gröſſen nennt Cramer Analyse des lignes courbes §. 95. halb unmöglich; (demi imaginaires) $\sqrt{-ax}$ ist ein Exempel davon, welche Gröſse möglich oder unmöglich ist, nachdem x verneint oder bejaht ist.

IV. Für die Gleichung $x^2 - 2xy + yy + x^2 y = 0$ giebt das Parallelogramm $y = Ax + Bx^2 \ldots$ und die Gleichungsreihe (649) wird

$$\begin{array}{llll} & x^2 & & \\ -2A & -2Bx^3 & \ldots & \\ +AA & +2AB & & \\ & +A & & \end{array}$$

wo zweene Werthe von $A = 1$; also $-2B + 2B + 1 = 0$ welches das Ungereimte $1 = 0$ gäbe. Daher kann die Reihe für y nicht gebraucht werden, und keine andere steigende ist nicht zu finden.

V. Man setze in der Gleichung (~~624~~ IV) $y = x + u$ so verwandelt sie sich in $uu + x^3 + x^2 u = 0$. Ist hier $u = \alpha x^{\varkappa} + \beta x^{\varkappa+\delta} \ldots$ so giebt das Parallelogramm $u = \alpha x^{3:2} + \beta x^2 \ldots$ und wenn man diese Reihe in gegenwärtige Gleichung setzt, findet sich nach (631) $\alpha = \pm\sqrt{-1}$; $\beta = -\frac{1}{2}$ also giebt es zwo Reihen für u die hier das doppelte Zeichen zusammen anzeigt

u =

$$u = \pm\sqrt{-1}.\sqrt{x^3} - \frac{xx}{2} \pm \frac{x^2\sqrt{x}}{8\sqrt{-1}} \ldots$$

Man wird leicht sehen, daß die Coefficienten bey den Potenzen von x deren Exponenten Brüche sind, unmöglich werden; jede solche Potenz läßt sich durch ein Product aus einer Potenz von x deren Exponent eine ganze bejahte Zahl ist, in $\sqrt{x}$ ausdrücken. Der übrigen Potenzen Coefficienten sind möglich.

VI. Diese beyden Reihen sind allemahl und nur möglich, wenn x eine verneinte Gröſſe ist, denn da wird sich jedes Glied das einen unmöglichen Coefficienten hat, durch ein Product aus was möglichem in $\sqrt{-x}$ ausdrücken lassen, das erste ist $x\sqrt{-x}$; das dritte $\frac{\mp x^2\sqrt{-x}}{8}$ u. s. w. Die Gleichung giebt nähmlich $u = (-xx \pm x\sqrt{(xx-4x)}) : 2$ welches unmöglich wird, wenn x bejaht und < 4 ist, daß es also keine steigende Reihe für bejahte x geben kann (674): Aber jedes verneinte x macht u möglich, also giebt es zwo steigende Reihen (667), für verneinte x.

Also ist in IV; $y = x \pm \sqrt{-x^3} - \frac{1}{2}xx \ldots$

VII. Dieses scheint IV; zu widersprechen, oder man kann wenigstens fragen, warum das Parallelogramm diese Reihe nicht giebt. Folgende Betrachtung wird gleich anfangs das Parallelogramm von allem Verdachte einer Unrichtigkeit befreyen: In der Reihe für y die man IV; findet, wird d nach 665; VIII. bestimmt,

wo-

wovon die Urſache in 664. liegt, damit man auch unten 680. vergleichen kann. Aber dieſe beyden §. §. ſetzen zum Voraus, daß jeder Coefficient der Reihe y, aus dem Coefficienten der Gleichungsreihe beſtimmt wird, wo er zum erſtenmahle vorkömmt, (man ſ. 656; 657.) und daß man allemahl die ſchon beſtimmten Coefficienten der Reihe y braucht, die folgenden zu beſtimmen. Dieſe Vorausſetzungen können in Fällen die 660; 661; anzeigen, irrig ſeyn. Wenn in einem Coefficienten der Gleichungsreihe, dasjenige, was den Coefficienten der Reihe y der aus ihm beſtimmt werden ſollte, enthält, ſich für ſich ſelbſt aufhebt, (wie — 2B + 2AB in IV.) ſo muß das übrige (wie A daſelbſt) entweder für ſich = o ſeyn, da denn der Coefficient der Reihe y unbeſtimmt bleibt, oder die Vorausſetzung, daß der ganze Coefficient der Gleichungsreihe = o ſeyn ſoll, findet nicht ſtatt, und alſo läſſt ſich das, was 656; 657; voraus ſetzt, da nicht anbringen, daher denn die Regel 665; VIII. hier wegfällt. Uebrigens ſind die Werthe der Fächer (665; VI; VII;) in IV; folgende $2m = m + 1 = 2$ und $m + 2$ welches 3 giebt. Alſo kann man für die Reihe der Exponenten jede annehmen, in der die Zahlen 2 und 3 enthalten ſind, folglich auch die Reihe 1; $1\frac{1}{2}$; 2; welches eben die iſt, die man in VI. findet. Folglich giebt das Parallelogramm auch dieſe Reihe an, wenn man die Regel 665; VIII. hier beyſeite ſetzt, die wie

680.

680. erinnert, ein Rath, nicht ein unverletzlicher Befehl ist.

Ueberdieß, ist die Absicht des Parallelogramms nur, m und d so zu bestimmen, daß alle einzelne Reihen der Theile der Gleichung (649) zusammen eine Gleichungsreihe ausmachen (siehe 662). Dieses nun findet auch bey der Reihe für y IV; statt. Daß sich aber hiebey die ungereimte Folge $1 = 0$ findet, das kömmt auf die Coefficienten der Gleichung an (661), und das Parallelogramm kann hiebey nichts thun, da eine kleine Veränderung der Gleichung dieses ändern würde; denn wenn sie nur $+ 2xy$ hätte, alles übrige aber wie vorhin bliebe, so würde der zweyte Coefficient der Gleichungsreihe $+ 2B + 2AB + 2AB + A$ also $B = -\frac{1}{4}$. Das Parallelogramm hat nähmlich blos mit den Exponenten zu thun, die bey andern Coefficienten der Gleichung doch eben dieselben bleiben können.

VIII. Wie man sich bey einer solchen Schwierigkeit zu helfen hat, wird folgendes Verfahren zeigen:

Man setze $y = px^{s} + qx^{s+\pi} \ldots$

so ist $x^2 = x^2$

$$-2xy = -2px^{s+1} - 2qx^{s+\pi+1} \ldots.$$

$$+yy = p^2x^{2s} + 2qpx^{2s+\pi} \ldots.$$

$$+x^2y = +px^{s+2} + qx^{s+\pi+2} \ldots.$$

Da muß man nun etliche Reihen zu Anfangsreihen (650) wählen. Man wähle dazu die ersten Glieder der Reihen x^2; $-2xy$; yy; so findet sich $\varepsilon = 1$; Auch kann man, wenn die Reihe für y steigen, oder δ bejaht seyn soll; keine andere Anfangsreihen wählen. Denn wollte man yy und xxy dazu nehmen, also $\varepsilon + 2 = 2\varepsilon$ setzen, so käme $\varepsilon = 2$ und $\varepsilon + 2 = 2\varepsilon = 4 > \varepsilon + 1$ und > 2 daß also die ersten Glieder der Reihen yy; xxy, nicht am Anfange der Gleichungsreihe stünden, weil der übrigen Reihen erste Exponenten kleiner wären. Diese Voraussetzung nun $\varepsilon = 1$ giebt folgendes:

$$xx = x^2$$

$$-2xy = -2p - 2qx \quad \overset{2+\pi}{\cdots} \quad -2rx \quad \overset{2+2\pi}{\cdots}$$

$$+yy = +pp - 2pq \quad +qq \quad +2pr$$

$$+xxy = +px^3 + qx \quad \overset{3+\pi}{\cdots} \quad \cdots$$

Hier kömmt es nun darauf an, unter welches Glied der obern Reihen man das erste der Reihe xxy setzen will, als wodurch der Werth von δ bestimmt wird. Wollte man es unter die zweyten Glieder, oder $2 + \pi = 3$ also $\pi = 1$ setzen, so geriethe man auf das Verfahren (IV). Man setze es also auf das dritte, oder $2 + 2\pi = 3$; so ist $\pi = \frac{3}{2}$ und weil $p = 1$ war; $qq + 1 = 0$; daß man also die Reihe VI. findet.

IX. Die Exempel 660; VI; und 675. IV. finden sich beym Cramer Anal. des Courbes §. 104.

704. die Erinnerungen, zu denen sie mich veranlasst haben, berechtigten mich sie hier beyzufügen. Wer übrigens einerley Gleichung nach Cramers Art, und nach der vorhin gelehrten auflösen will, wird selbst urtheilen, wo die Rechnung ordentlicher und kürzer geführt wird.

676. Anm. Wenn man für A eine sehr zusammengesetzte, oder Irrationalgrösse bekömmt, so kann man, die Rechnung zu erleichtern, in den Ausdrückungen der andern Coefficienten den Buchstaben A beybehalten, und den gefundenen Werth erstlich brauchen, wo er zur Anwendung nöthig ist.

677. Anm. Ueberhaupt ist es oft bequem, jeden Coefficienten durch die vorhergehenden selbst, z. E. B durch A; C durch B; A; u. s. w. auszudrücken, ohne daß man die Werthe von A; B; C; wie sie sich wirklich finden lassen, aus einander setzt. Dieses dient oft, das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortgehen, leichter zu entdecken.

678. Anm. Eine Foderung bey diesem Verfahren ist, daß man bestimmte Gleichungen von jedem Grade auflösen könne, weil A durch solche gegeben wird (652). Indessen kann A in seiner Gleichung niedriger seyn, als y in der zwischen den beyden veränderlichen Grössen, wie 666 davon Exempel giebt. Auch wird die Gleichung für A meistens weniger Theile enthalten als die Gleichung zwischen den beyden ver-

änderlichen Grössen, weil ordentlich nicht alle Theile dieser letzten Gleichung Anfangsreihen geben. Fände sich dieses, so bestünde der Werth von y aus einem einzigen Gliede (657), dessen Coefficient A freylich durch keine einfachere Gleichung gegeben werden könnte, als die ist, welche y durch x giebt.

679. Anm. Eine andere Foderung ist, den grössten gemeinschaftlichen Unterschied einer gegebenen Menge von Zahlen zu finden. Weil hier unter diesen Zahlen auch eigentliche und uneigentliche Brüche, und verneinte seyn können, und ihre Menge unbestimmt ist, so würden Vorschriften zur allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe weitläuftig werden; die beygebrachten Exempel aber zeigen, daß sich solches gar leicht bewerkstelligen lässt.

680. Anm. Diese Foderung (679) ist nur deßwegen gethan worden, damit sich die Reihe aufs schnellste nähern sollte (664). Gesetzt d sey der grösste gemeinschaftliche Unterschied, und δ ein kleinerer; der aber so bestimmt werden muß, daß wenn φ; γ; ganze bejahte Zahlen sind $m\varkappa + \tau + \varphi\delta = m\varkappa + \tau + fd$ (662) oder $\varphi\delta = fd$; und eben so $\gamma\delta = gd$ u. s. w. und man nähme an $y = Ax^{m} + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta}$ so scheint es, als würde man eine andere Reihe statt der 645. bekommen, die sich nur langsamer nähern würde. Aber die Rechnung

nung wird zeigen daß bey einer solchen Reihe b; c; u. s. w. = 0 seyn werden, und daß diese neue Reihe keine andern wirklichen Coefficienten noch Exponenten haben wird, als die 645; oder daß sie mit ihr einerley seyn wird. Die Sache wird sich ohngefähr wie 657. erweisen lassen; ich will aber hier mich damit nicht beschäfftigen, da ich schon von dem Newtonischen Parallelogramm so weitläuftig gehandelt habe, und der Beweis dieses Umstandes zum Gebrauche nicht erfordert wird. Ein solcher Beweis würde nur zeigen, daß man etwas nicht einmahl thun kann, welches man schon wegen 665; VIII. nicht thun soll.

Exempel. Zu 675. sind für $m = 2$; die Werthe 2; 4; also nach 665; VIII. $\delta = 2$; Man nehme $\delta = 1$; oder $y = Ax^2 + bx^3 + Bx^4 + cx^5 + Cx^6 \ldots$, so kömmt

$$+ 2Ax^2 + 2Abx^3 + 2aBx^4 + 2acx^5 \ldots$$
$$+ AA + 2Ab \ldots$$

also $A = \frac{1}{2}$; $b = 0$; $B = -\frac{1}{8a}$; $c = 0$; u. s. w. oder die Reihe für $\delta = 1$ wird mit der Reihe für $d = 1$ einerley.

681. Zus. Ist es im binomischen Lehrsatze (141) erlaubt, statt m eine gebrochne, oder verneinte Zahl zu setzen, auf welche Vermuthung uns (630) leiten könnte, so wird sich dieses ganze Verfahren auch anbringen lassen, wenn die Gleichung zwischen x und y; auch in Absicht auf y nicht rational ist. Denn daß k; (645);

finden kann, wenn man sie in die Fächer des Parallelogramms setzt. Wenn $= x^3 \mp axy + y^3 = 0$ so ordne man diese Gleichung folgender Gestalt.

x^3
$*\ axy$
$*\ *\ *\ y^3$

Die äuserſten Fächer $x^3 = axy$ gesetzt, so kömmt man $y = xx : a$ für das erste Glied der gesuchten Reihe. So trägt Newton a. a. O. 29. §. die Regel vor. Die Gleichung wird auf diese Art doppelt geordnet (2), einmahl nach x das anderemahl nach y. In das Fach 0 des Parallelogramms (636) kömmt das ganz beständige Glied, wenn sich eines in der Gleichung befindet, in die Fächer m; 2m; kommen die Potenzen von y nach der Ordnung, und in die Fächer b; 2b; ... die Potenzen von x; soviel als derselben vorhanden sind.

688. Anm. Das Parallelogramm auf die nur erzählte Art ausgefüllt, hat der Herr Abt de Gua Usage de l'Analyse de des Cartes pour decouvrir les proprietés des lignes geometriques de tous les ordres so gelegt, daß die Diagonale durch das Fach, in welches die beständige Gröſſe gehöret, vertical wird, und dieses Fach zu unterſt zu stehen kömmt. So kommen allemahl alle die Theile der Gleichung in eine Horizontallinie, in denen x und y zusammen eine gleich hohe Abmeſſung ausmachen,

z. E.

683. Exempel. $x^5 - 4x^4y^{1:2} + 6x^3 y - 4x^2 y^{3:2} + yyx + 10x^{1:3} - 6y^{1:2} = 0$; die Exponenten ſtehen nach meiner Regel ſo

$\frac{15}{3}$
. $\frac{1}{2}n + 4$
. . $n + 3$
. . $\frac{3}{2}n + 2$
. . . $2n + 1$
. .
$\frac{1}{3}$.
* $\frac{1}{2}n$

Aus $\frac{15}{3} = 2n + 1$ finde ich $n = 2$ und die Werthe werden 5; 1; $\frac{1}{3}$; alſo $d = -\frac{2}{3}$ und $y = Ax^2 + Bx^{4:3} + Cx^{2:3} \ldots$

684. Zweytes Exempel. $y^{5:2} + x^{7:4} - y^{2:3} - y^{1:7} \cdot x^{3:11} + x^{3:5} - y^{-6:5} = 0$. Wenn man hier Ax^n ſtatt y ſetzt, ſo kommen die Exponenten nach der Ordnung $\frac{5}{2}n$; $\frac{7}{4}$; $\frac{2}{3}n$; $\frac{1}{7}n + \frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{6}{5}n$; Die Brüche, bey welchen ſich n als ein Factor befindet, d. i. die Exponenten von y; auf einerley Nenner gebracht, und die Brüche, bey welchen ſich n nicht als ein Factor befindet, d. i. die Exponenten von x, auch unter ſich auf einerley Nenner gebracht, erhält man folgende Ordnung:

te, die mir nöthig schienen, um von Herrn Eulers Vortrage; im II. B. der Introd. in Analys. in vollkommen überzeugt zu seyn. Ich muß dieses wohl hier zu meiner Entschuldigung erwähnen, weil ich das Parallelogramm in seiner alten englischen, und nicht in der neusten französischen Lage vorgestellt habe.

Herr M. J. G. Pfeiffers Aequationum speciosarum resolutio per Series ope parallelogrammi Newtoniani Tub. 1765. 56. Quart. 1. Kupfertafel erläutert das was ich bisher abgehandelt habe, mit vieler Einsicht und Scharfsinnigkeit, und enthält auserdem lehrreiche Untersuchungen, die mir hier beyzubringen der Platz nicht verstattete, auch Anwendungen auf krumme Linien. Hr. Holland hat ebenfalls zu Tübingen den Innhalt des Kästnerischen Vortrages vom newtonischen Parallelogramm herausgegeben, woraus man den Zusammenhang der Sätze in der Kürze übersehen kann.

Die Umkehrung der Reihen.

(Reuersio serierum.)

690. Aufg. Es sey $x = gy^{\lambda} + hy^{\lambda+\iota} \ldots$ ohne Ende, daß x durch eine Reihe von y gegeben ist, da die Exponenten in einer Progression fortgehen, deren Unterschied ι ist. Man sucht y durch eine Reihe von x.

Aufl.

bestimmen, und richtet seine Absicht vornehmlich auf die Bestimmung von d. Aber nach Gravesi. Regel, die er für vollkommen hält, findet er in dem Exempel (683) statt d; die Grösse $\frac{1}{3}$; und setzt also $y = Ax^2 + Bx^{5:3} + Cx^{4:3} \ldots$ Daß er auf diese Art wieder 680. fehlt, zeigt die Rechnung; denn nach ihm wäre $y^{\frac{1}{2}} = A^{1:2}.x + \frac{1}{2}A^{-1:2}.B.x^{2:3}$ und $y^{3:2} = A^{3:2}x^3 + \frac{3}{2}.A^{1:2}.Bx^{8:3}$ also, die Coefficienten der Reihe so unter einander geschrieben, wie die Theile der Gleichung (683) folgen:

$$\left.\begin{array}{l} -4\sqrt{A} \\ +6A \\ -4A\sqrt{A} \\ +AA \end{array}\right| x^5 \qquad \left.\begin{array}{l} -2A^{1:2}B \\ +6B \\ -6B\sqrt{A} \\ +2AAB \end{array}\right| x^{14:3}$$

$$+10x^{1:3} \qquad -6Ax^{1:2}$$

Hier ist $B = 0$ und Gravesand nimmt also diesen Coefficienten nach seiner Regel überflüssig an; Er hätte nähmlich $d = -\frac{2}{3}$ und nicht $-\frac{1}{3}$, annehmen sollen.

687. Zus. Wenn nach 665. I. und 648; $Ax^{mx+r} + \frac{p}{q}Ax^{ms+\eta} = 0$; so ist auch $y^x x^r + \frac{q}{p}y^s x^\eta = 0$; nur y statt Ax^m gesetzt. Hier bedeutet y das erste Glied der Reihe ⊙, welches man also aus der Gleichung selbst

finden kann, wenn man sie in die Fächer des Parallelogramms seßt. Wenn $= x^3 + axy + y^3 = o$ so ordne man diese Gleichung folgender Gestalt.

x^3
$*\ axy$
$*\ *\ *\ y^3$

Die äuserſten Fächer $x^3 = axy$ geseßt, bekömmt man $y = xx : a$ für das erste Glied der gesuchten Reihe. So trägt Newton a. a. O. 29. §. die Regel vor. Die Gleichung wird auf diese Art doppelt geordnet (2), einmahl nach x das anderemahl nach y. In das Fach ó des Parallelogramms (636) kömmt das ganz beständige Glied, wenn sich eines in der Gleichung befindet, in die Fächer m; 2m; kommen die Potenzen von y nach der Ordnung, und in die Fächer b; 2b; ... die Potenzen von x; soviel als derselben vorhanden sind.

688. Anm. Das Parallelogramm auf die nur erzählte Art ausgefüllt, hat der Herr Abt de Gua Usage de l'Analyse de des Cartes pour decouvrir les proprietés des lignes geometriques de tous les ordres so gelegt, daß die Diagonale durch das Fach, in welches die beständige Gröſſe gehöret, vertical wird, und dieses Fach zu unterst zu stehen kömmt. So kommen allemahl alle die Theile der Gleichung in eine Horizontallinie, in denen x und y zusammen eine gleich hohe Abmeſſung ausmachen,

z. E.

z. E. in der nächsten Horizontallinie über dem untersten Fache stehen x; y; in der nächsten darüber xx; xy; yy; u. s. w. Diese Theile befinden sich bey der Newtonischen Lage des Parallelogramms in Linien, die mit der andern Diagonale, nicht mit der, welche hier vertical steht, parallel gehen. Dieser wichtige Vortheil, hat Herrn Cramer; introd. à l'Analyse des lignes courbes, pref. veranlasst, Herrn Suas Einfall einen sehr glücklichen zu nennen, daß er ein Ding auf die Spitze gestellt hat, das bisher auf einer Seite gestanden hatte.

689. Zus. Vermittelst des Parallelogrammes lassen sich die Ordinaten einer krummen Linie durch die Abscissen ausdrücken. Daher ist begreiflich, wie es dienen kann, die Eigenschaften der krummen Linien zu entdecken. Newton hat vermuthlich auf diese Art das gefunden, was er in seiner enumeratione linear. tertii ordinis gelehrt hat. Stirling hat sich desselben nachgehends zu eben der Absicht bedient, und Cramer diese Anwendung, aber unter der Lage, die Herr Gua ihm gegeben hatte, in seinem genannten Werke allgemein gemacht. Ich finde nicht, daß diese veränderte Lage vorzüglich zu so viel Bequemlichkeiten verhelfe. Wenigstens habe ich, ehe mir noch Cramers Werk in die Hände kam, keine Unbequemlichkeiten bey dem Gebrauche des Parallelogramms finden können, als ich durch solches den Beweis verschiedener allgemeinen die krummen Linien betreffenden Sätze such-

te,

te, die mir nöthig schienen, um von Herrn Eulers Vortrage; im II. B. der Introd. in Analys. inf. vollkommen überzeugt zu seyn. Ich muß dieses wohl hier zu meiner Entschuldigung erwähnen, weil ich das Parallelogramm in seiner alten englischen, und nicht in der neusten französischen Lage vorgestellt habe.

Herr M. J. G. Pfeiffers Aequationum speciosarum resolutio per Series ope parallelogrammi Newtoniani Tub. 1765. 56. Quartf. 1. Kupfertafel erläutert das was ich bisher abgehandelt habe, mit vieler Einsicht und Scharfsinnigkeit, und enthält auserdem lehrreiche Untersuchungen, die mir hier beyzubringen der Platz nicht verstattete, auch Anwendungen auf krumme Linien. Hr. Holland hat ebenfalls zu Tübingen den Innhalt des Kästnerischen Vortrages vom newtonischen Parallelogramm herausgegeben, woraus man den Zusammenhang der Sätze in der Kürze übersehen kann.

Die Umkehrung der Reihen.

(Reuersio serierum.)

690. Aufg. Es sey $x = gy^{\lambda} + hy^{\lambda+\delta}$ .. ohne Ende, daß x durch eine Reihe von y gegeben ist, da die Exponenten in einer Progression fortgehen, deren Unterschied δ ist. Man sucht y durch eine Reihe von x.

Aufl.

Aufl. Die Vorschrift 665. I; II; giebt

I

$*\ldots\lambda m\ldots(\lambda+\delta)m\ldots.$

Weil die Vielfachen von m hier ohne Ende fortgehen, so kann man keinen äuſersten Exponenten zur rechten Hand annehmen. Auch kann man nicht alle Exponenten in der untern wagrechten Reihe gleich, oder $m=0$ setzen; denn da müſste man, A zu finden eine Gleichung von unzählich viel Abmessungen auflösen. Also ist nichts übrig als $\lambda m=1$ oder $m=1:\lambda$ zu setzen. Dieses giebt die Werthe der Exponenten 1; $1+\delta:\lambda$ u. s. w. also $d=\delta:\lambda$, oder die

$1:\lambda \qquad (1+\delta):\lambda$

umgekehrte Reihe $y=Ax \quad +Bx \quad \ldots$

691. Zus. Wäre $\lambda=0$; so würde m unendlich. Also geht in diesem Falle die Umkehrung so nicht von statten, und $x=g+hy^{\delta}\ldots$ umzukehren, muſs man $z=x-g$ setzen und die Reihe $z=hy^{\delta}\ldots$ umkehren, oder y durch $z=x-g$ suchen; wo $\lambda=\delta$; und $d=1$.

692. Aufg. Eine unendliche Reihe, die nach z geordnet ist, ist einer unendlichen Reihe, die nach y geordnet ist, gleich; Man soll y durch z ausdrücken. Es sey σ)

$\varepsilon \qquad \varepsilon+\varkappa \qquad\qquad \lambda \qquad \lambda+\delta$

$az+bz \quad \ldots.=\text{☿})\ gy+hy \quad \ldots.$

Man setze x der Reihe ☿ gleich; und drücke y durch x nach 690. aus; Weil nun auch die Reihe

he $\delta = x$; ſo ſetze man in den Ausdruck, der y durch x giebt, überall die Reihe δ ſtatt x; ſo bekömmt man y durch z.

693. Anm. So kommen ſehr zuſammengeſetzte Ausdrückungen heraus; welches in dieſer Allgemeinheit nicht anders ſeyn kann. Drey beſondere Fälle, nähmlich 690. für $\lambda = 1$; $\delta = 1$ und $\delta = 2$; und 692. für $\varepsilon = \varkappa = \lambda = \delta = 1$; findet man in Hauſens Elem. Matheſ. Calcul. Extenſ. p. 173. ſequ. wo auch das ſehr zuſammengeſetzte Geſetz der Coefficienten angegeben, aber nicht allgemein erwieſen wird. Meine Abſicht iſt hier nur zu zeigen, wie die Geſtalt der umgekehrten Reihe vermittelſt des Newtoniſchen Parallelogramms gefunden wird. Davon iſt beym Hauſen und bey denen, die das Parallelogramm hiezu nicht gebrauchen, nichts zulängliches gelehret worden, und wenn ſie die Geſtalt derum gekehrten Reihe nach Gefallen annehmen, ſo kann ſie nichts rechtfertigen, als der Erfolg (629). Wenigſtens ſind ſie nicht verſichert, ob ſich nicht auſer der Reihe, die ſie annehmen, noch andere annehmen lieſſen.

Eine andere Art die folgenden Glieder der unendlichen Reihe zu finden.

694. I. Wenn man A und m aus dem Parallelogramm hat (665), ſo ſetze man in die Gleichung $Ax^m + p$ ſtatt y; Vermöge des binomiſchen Lehrſatzes, wird ſich in der veränder-

ten

ten Gleichung, die man ſolchergeſtalt erhält, auch p von der erſten Abmeſſung befinden. Man ſchreibe linker Hand in einer Columne lothrecht untereinander alle Theile der Gleichung, welche p enthalten, von demjenigen angefangen, in welchem ſich p von der erſten Abmeſſung befindet, und wenn dergleichen mehr vorhanden ſind, ſchreibe man denjenigen zu oberſt, in welchem x die niedrigſte Abmeſſung hat; ſo fahre man nach der Ordnung für die übrigen fort. Coefficienten heiſſen hier die beſtändigen Gröſſen, oder auch die durch x gegebenen Gröſſen, die in eine Potenz von p multiplicirt ſind.

II. Das erſte Glied von p zu bekommen, ſetze man den obern Theil der lothrechten Reihe dem linken der Horizontalreihe gleich, die Diviſion wird das erſte Glied der Reihe für p geben.

III. Dieſen Werth des erſten Gliedes ſetze man ſtatt p in die übrigen Theile der lothrechten Reihe, ſo bekömmt man die erſten Glieder der Reihen, die aus ihnen entſtehen.

IV. Unter dieſen erſten Gliedern rechne man diejenigen zuſammen, in denen x einen Exponenten, und zwar den niedrigſten hat, die alſo die niedrigſten ſind.

V. Die Summe addire man mit entgegengeſetzten Zeichen zu dem Gliede der oberſten Horizontalreihe, das eben den Exponenten hat.

VI. Befände ſich kein ſolches Glied in der obern Horizontalreihe, ſo ſchreibe man die erwähnte Summe ſelbſt an deſſelben Stelle.

VII.

VII. Was die Addition V. oder das Verfahren VI. giebt, ist das zweyte Glied der obersten Horizontalreihe, die aus dem obersten Theile der lothrechten entstehen soll, und giebt, mit dem Coefficienten dieses obersten Theiles dividirt, das zweyte Glied der Reihe für p.

VIII. Vermöge dieses zweyten Gliedes mit dem ersten (II) finde man die zweyten Glieder der Reihen (III) und soviel von dieser Reihen folgenden Gliedern, als sich dadurch finden lassen.

IX. Unter diesen zweyten Gliedern, rechne man wieder die niedrigsten (IV) zusammen, und verfahre nach V. oder VI; so giebt sie wie in VII; der Reihe p drittes Glied.

X. Aus diesem mit den ersten beyden verbunden finde man wieder folgende Glieder der Reihen III; verfahre damit nach IX; und finde so das folgende der Reihe p; nach IX.

XI. Es erhellt, daß man dieses Verfahren immer so weiter fortsetzen kann.

XII. Will man p bis auf eine gewisse Potenz von x und nicht weiter suchen, so hat man auch nicht nöthig die Glieder der Reihen III, welche diese Potenz übersteigen, zu berechnen.

Exempel. In der Gleichung $y^3 = a^3 + x^3$; den Werth von y zu finden, oder aus dem, was rechter Hand steht, die Cubikwurzel auszuziehen; setze man $y = a + p$ dieses gibt $3aap + 3app + ppp = xxx$ oder

3aap

ein p enthält, so heißt dieses soviel, als: p wird dergestalt bestimmt, daß alle die Glieder, die p enthalten, zusammen soviel betragen als alle die Glieder auf der andern Seite, die p nicht enthalten; Wenn daher $\delta = 0$ ist, oder wenn aus der Gleichung kein Glied, das kein p enthielte, und den Exponenten n hatte, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens kam, so wird $\alpha p = \ldots - \zeta x^n$ angenommen, damit die Glieder in αp und P die den Exponenten n haben, zusammen 0 ausmachen.

Im dritten Exempel ist $n = 3$; $\delta = 1$; $\alpha = 4$; $P = (x + 3p + pp) \cdot p$; $\zeta = -\frac{3}{128}$.

695. Zus. Wenn das erste Glied von p das man solchergestalt fände, kein x enthielte, sondern eine beständige Grösse wäre; so würden die ersten Glieder aller der Reihen auch so beschaffen seyn, die aus den Theilen der linken Columne (695. I.) entstehen, welche nur Potenzen von p, ohne daß x darein multiplicirt wäre, enthalten. In diesem Falle also, wenn die Gleichung zwischen x und p ein vollkommen beständiges Glied hat, findet dieses Verfahren nicht statt, es wäre denn, daß die untern Theile der linken Columne, (die zusammen P im nur vorgetragenen Beweise ausmachen) alle so beschaffen wären, daß jeder p mit x multiplicirt enthielte.

Ex. $p + px = 1$ giebt

$p = 1 - 1.x + 1.xx - 1x^3 \ldots$

$px = \quad +1 \quad -1 \quad +1$

696. Zuſ. Giebt eine Gleichung ins Parallelogramm geſetzt (687), zwey äuſerſte Fächer deren eines x das andere y enthält, d. i. befindet ſich kein ganz unveränderliches Glied in ihr ſo kann man dieſes Verfahren (694) gleich mit x und y anbringen, ohne p zu ſuchen.

Ex. So giebt $y^3 + yy + y - x^3 =$ folgendes:

$y = x^3 - 1.x^6 + 1.x^9 * \quad - 4.x^{11}$
$yy = \quad +2 \quad -2 \quad +3.x^{12} - 2 \ldots$
$y^3 = \quad +1 \quad -3 \quad +6$

697. Zuſ. Auf eben die Art lieſſe ſich eine absteigende Reihe erhalten. Man ordne die nur gebrauchte Exempel ſo:

$y^3 = x^3 - 1.x^2 - \frac{1}{3}.x + \frac{2}{3} + \frac{7}{81}.\frac{1}{x}$

$y^2 = \quad +1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} + \frac{11}{81} \ldots$
$y = \quad +1 \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{9}$

Nähmlich $y^3 = x^3 \ldots$ giebt $y = x$ und $yy = xx$; und alſo das zweyte Glied von $y^3 = -xx$. Aus den erſten beyden Gliedern des Würfels von y ziehe man die Cubikwurzel, ſo kömmt das zweyte Glied von $y = * - \frac{1}{3}$; alſo das zweyte von $yy = * - \frac{2}{3}x$, welches, zum erſten Gliede der Reihe y addirt, $+\frac{1}{3}x$ giebt, und mit entgegengeſetztem Zeichen in die obere Horizontalreihe gebracht wird. Die Wurzel aus den drey erſten Gliedern des Würfels gezogen giebt das dritte Glied von $y = ** - \frac{2}{9x}$

u. ſ. w.

f. w. die folgenden Glieder von y sind $+\frac{7}{1xx} + \frac{5}{81x^3}$ u. s. w. Aber dieses Verfahren ist wegen der Ausziehung der Wurzeln mühsam.

698. Anm. In Colsons Comment. über Newtons Method of Fluxions, Sect. II. und V. findet man dieses Verfahren weitläuftig erläutert.

Auflösung der cubischen bestimmten Gleichungen durch die sogenannte cardanische Regel.

699. Aufg. Einen irrationalen Ausdruck für die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 = ax + b$ zu finden. Jede cubische Gleichung läßt sich auf diese Gestalt bringen (282).

Aufl. Man setze $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; und nehme ferner an, A und B sollen die beyden Wurzeln nachstehender quadratischen Gleichung $z^2 = \alpha z - \beta$ seyn. Um α und β durch die gegebenen Coefficienten a; b; zu bestimmen; überlege ich, daß $A + B = \alpha$; $A.B = \beta$ (224) und

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{A}.B + 3\sqrt[3]{A}.B.\sqrt[3]{B} + B$$
$$= A + B + 3\sqrt[3]{A.B}.(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})$$
$$= 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B.$$

Gleichung, welche p enthalten, zusammengenommen, den auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebrachten Theilen der Gleichung, die kein p enthalten, gleich sind; welches eben das ist, was die Gleichung erfodert. Dieses läfst sich durch Zeichen allgemein so erläutern. Der oberste Theil der lothrechten Reihe (1) heifse αp; die Summe aller übrigen Theile dieser lothrechten Reihe zusammen heisse P; und ein unbestimmter Theil der Gleichung, welcher kein p enthält, heisse δx^n; Nun wird aus jedem Theile derer, welche zusammen P ausmachen, eine Reihe, die Summe der Glieder aller dieser Reihen, in denen x^n ist, heisse $+ \zeta x^n$ so steht die Rechnung nach den gegebenen Vorschriften so; die Puncte bedeuten, daß Glieder vorhergehen und folgen.

$$\begin{array}{rl} \alpha p = & \ldots\ldots \delta . x^n \ldots . \\ & - \zeta \quad \ldots . \\ P = & + \zeta \quad \ldots . \\ \hline & \delta - \zeta \\ p = \ldots\ldots & \frac{}{\alpha} . x^n \ldots \end{array}$$

Hier ist klar, daß das Glied von p aus der Voraussetzung bestimmt wird, daß $\alpha p + P = \ldots + \delta x^n$ oder daß dasjenige, was in den Reihen αp und P die Potenz n von x enthält, zusammen nicht mehr als δx^n beträgt; deßwegen nimmt man $\alpha p = \ldots . (\delta - \zeta) . x^n$ an, wenn $P = \ldots + \zeta x^n$ ist. Da also δx^n nach der Ordnung jeden Theil der Gleichung bedeuten kann, der

kein

kein p enthält, so heißt dieses soviel, als: p wird dergestalt bestimmt, daß alle die Glieder, die p enthalten, zusammen soviel betragen als alle die Glieder auf der andern Seite, die p nicht enthalten; Wenn daher $\delta = 0$ ist, oder wenn aus der Gleichung kein Glied, das kein p enthielte, und den Exponenten n hatte, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens kam, so wird $\alpha p = \ldots - \zeta x^n$ angenommen, damit die Glieder in αp und P die den Exponenten n haben, zusammen 0 ausmachen.

Im dritten Exempel ist $n = 3$; $\delta = 1$; $\alpha = 4$; $P = (x + 3p + pp).\ p$; $\zeta = -\frac{3}{125}$.

695. Zus. Wenn das erste Glied von p das man solchergestalt fände, kein x enthielte, sondern eine beständige Grösse wäre; so würden die ersten Glieder aller der Reihen auch so beschaffen seyn, die aus den Theilen der linken Columne (695. I.) entstehen, welche nur Potenzen von p, ohne daß x darein multiplicirt wäre, enthalten. In diesem Falle also, wenn die Gleichung zwischen x und p ein vollkommen beständiges Glied hat, findet dieses Verfahren nicht statt, es wäre denn, daß die untern Theile der linken Columne, (die zusammen P im nur vorgetragenen Beweise ausmachen) alle so beschaffen wären, daß jeder p mit x multiplicirt enthielte.

Ex. $p + px = 1$ giebt

$p = 1 - 1.x + 1.xx - 1x^3 \ldots$

$px = \quad +1 \quad -1 \quad +1$

Hieraus folgt $a = 3\sqrt[3]{A.B} = 3\sqrt[3]{\beta}$; $b = A + B = \alpha$ folglich $zz = bz - \frac{a^3}{27}$; daher $z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3)}$. Der Irrationaltheil mag c heissen; so ist $A = \frac{1}{2}b + c$, $B = \frac{1}{2}b - c$; und $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - c)}$ dafür ich $m + n$ schreiben will.

700. Zus. Die cubische Gleichung mit $x - m - n$ dividirt (226), gibt zum letzten Reste $-b - a.(m+n) + (m+n)^3$ aber vorhin fand man schon

$(m+n)^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB}.(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = b + a.(m+n)$

dazu addirt $-b - a(m+n)$

geht auf; der Quotient ist $x^2 + (m+n)x + (m+n)^2 - a$ hier ist $3mn = a$; also $(m+n)^2 - a = mm + nn - 3mn$; Nun sind die Wurzeln $\frac{m+n \pm \sqrt{((m+n)^2 - 4.(mm + nn + 3mn))}}{2}$

also werden diese Wurzeln

$$x = \frac{-(m+n) \pm (m-n)\sqrt{-3}}{2}$$

701. Zus. Wenn c möglich ist, also auch m und u möglich sind, so sind zwo Wurzeln der cubischen Gleichung (695) unmöglich.

702. Lehns. Es sey K eine mögliche Grösse; λ eine unmögliche; deren Quadrat möglich ist, z. E. $\lambda = L.\sqrt{-1}$ wo

L mög-

L möglich ist; ferner sollen P; Q; auch mögliche Grösſen bedeuten; es mögen nun K; L; P; Q; rational oder irrational seyn; so ist I) $\sqrt[3]{(K+\lambda)} = P + Q\sqrt{-1}$;

II) $\sqrt[3]{(K-\lambda)} = P - Q\sqrt{-1}$.

Bew. Daß die Cubikwurzel aus der Summe einer möglichen und einer unmöglichen Grösſe unmöglich ist, fällt in die Augen: Sie muß aber auch einen möglichen Theil haben, denn eine unmögliche Grösſe allein, kann in ihrem Würfel nicht den möglichen Theil K geben. Man mache in I. auf beyden Seiten die Würfel; und seße das Mögliche dem Möglichen, das Unmögliche dem Unmöglichen gleich, (ohngefähr nach der Art zu schlieſſen wie in 235; 233); so ist $K = P^3 - 3PQQ$ und $\lambda = (3PP.Q - Q^3).\sqrt{-1}$ oder $L = 3PPQ - Q^3$ folglich $K - \lambda = P^3 - 3PPQ\sqrt{-1} - 3PQQ + Q^3\sqrt{-1} = (P - Q\sqrt{-1})^3$; Also erhellt, daß die Gleichungen I; II; zusammen richtig sind, oder, daß die zweyte aus der ersten folget: Nur muß man noch darthun, daß P; Q; mögliche Grösſen sind. Dieses zeigt sich folgendergestalt: $(K+\lambda).(K-\lambda) = KK - \lambda\lambda = KK + LL$ ist gewiß eine mögliche Grösſe; also ist es auch ihre Cubikwurzel. Diese Cubikwurzel heisse e; Nun ist aus dem bisher geführten Beweise $(K+\lambda).(K-\lambda) = ((P+Q\sqrt{-1}).(P-Q\sqrt{-1}))^3 = (PP+QQ)^3$ also $e = PP + QQ$; oder

707. Zuſ. Wenn die cubiſche Gleich zwo unmögliche Wurzeln hat, ſo giebt das V fahren 699; m + n für einen möglichen W der übrigen möglichen Wurzel.

708. Zuſ. Sind aber der cubiſchen G chung Wurzeln alle drey möglich, ſo werden und n unmöglich, daß ſich alſo das nur erwäh te Verfahren, wie es ſcheinet, bey drey m lichen Wurzeln nicht anbringen läſſt. D ſcheinbare Schwürigkeit ſoll ſogleich gehob werden.

709. Lehrſ. Wenn die cubiſche Gl chung drey mögliche Wurzeln hat, ſo gi das Verfahren 699. ſolche alle drey.

Bew. Alsdenn iſt $\sqrt[3]{A} = P + Q\sqrt{-}$ und auch $= (P + Q\sqrt{-1}).\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Fingleichen $\sqrt[3]{B} = P - Q\sqrt{-1}$ und auch $(P - Q\sqrt{1}).\frac{-\pm\sqrt{-3}}{2}$ (240). Nun soll $3\sqrt[3]{AB} = a$ möglich ſeyn (699); Man muß alſo ſolche Ausdrückungen der Cubikwur zeln zuſammen nehmen, um x auszumachen, de ren Product möglich iſt. Folglich ſind die drey Werthe von x;

1) $P + Q\sqrt{-1} + P - Q\sqrt{-1} = 2$

2) $(P + Q\sqrt{-1}).\frac{(-1 \pm \sqrt{-3})}{2} + (P - Q\sqrt{-1})$

3) $(-1$

Also sind die Wurzeln der Gleichung ⊙: -3; $-\frac{3}{2}$; $+\frac{3}{2}$. Es erhellt, daß eben aus der Ursache Q durch eine cubische Gleichung bestimmt wird.

704. Anm. Will man die Verkürzung der Rechnung durch den Gebrauch der Grösse e nicht beobachten, die Clairaut lehret, Alg. 256. der deutschen Uebers. so kann man aus den beyden Gleichungen, die im Anfange des Beweises stehen, K = ... und L = ...; Q wegschaffen (199) alsdenn aber findet man für P eine Gleichung des 9 Grades, die sich auf eine cubische bringen lässt. Dieses ist Landen begegnet, Mathematical Lucubrations pag. 54.

705. Lehrs. **Wenn c 699. unmöglich ist; also auch m und n unmöglich sind (702) so sind der cubischen Gleichung 699. drey Wurzeln möglich.**

Bew. Alsdenn ist $m = P + Q\sqrt{-1}$; $n = P - Q\sqrt{-1}$ (702) folglich $m + n = 2P$; $m - n = 2Q\sqrt{-1}$ welches nach 700. mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, $-2Q.3$ giebt, also sind die drey Wurzeln; $2P$; (699) und $P + 3Q$ (700).

706. Zus. Weil c möglich oder unmöglich ist, nachdem $\frac{1}{4} - bb\,\frac{1}{27}\,a^3$ bejaht oder verneint ist; so hat die cubische Gleichung (699) lauter mögliche, oder zwo unmögliche Wurzeln, nachdem $\frac{1}{4}\,bb + \frac{1}{27}\,aaa$ verneint oder bejaht ist.

707.

und multiplicirt so kömmt $x^3 - 3(PP + Q$
$x - 2(P^3 - 3PQQ) = o$ Aber $PP + QQ$
$\sqrt[3]{AB}$ (702) $= \frac{1}{3}a$ (699) und $P^3 - 3PQQ =$
(702) $= \frac{1}{2}b$ (699) also verwandelt sich
Gleichung in $x^3 - ax - b = o$ welches
699. ist.

712. Zus. Eben die nur gefundene Gl
chung lässt sich auch so ausdrucken $x^3 - 3ex \cdot$
$2K = o$; Von diesen Wurzeln sind die Wu
zeln der Gleichung ⊙ (702) die Hälften (280

713. Zus. Auch in 710. lässt sich die Gl
chung 699. aus den Wurzelgleichungen machen
Diese Erinnerung findet man in der Ma
Gaetana Agnesi, Instituzioni analitiche ad u
della gioventu Italiana T. I. §. 187.

714. Zus. Wenn in 710; $m = n$ also
699; $c = o$ so sind die beyden übrigen Wer
von x; jeder $= -m$; und die Gleichung h
also zwo gleiche Wurzeln jede $= -m$; und
der dritten $= 2m$;

715. Anm. Für diesen Fall ist $\frac{1}{4}bb =$
$\frac{1}{27}a^3$ (699) folglich $\frac{1}{2}b = \left(\frac{a}{3}\right)3 : 2$ also
die Gleichung $x^3 = ax + \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{1}{3}a}$; und
ihre Wurzel $2m = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Man
kann sich gar leicht dergleichen Exempel in Za
tio

$\frac{(-1 \mp \sqrt{-3})}{2} = -P \mp Q\sqrt{3}$. Wenn man nähmlich für den zweyten Werth von x; die obern Zeichen vor der unmöglichen Wurzel, für den dritten die untern gebraucht, denn so erhält man $\sqrt[3]{AB} = (PP + QQ \cdot \left(\frac{-1-(-3)}{2}\right)$ möglich. Gegentheils würde dieses Product und seine Cubikwurzel unmöglich werden, wenn man $(P + Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ $+ (P - Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ annehmen wollte.

710. Lehrs. Wenn die cubische Gleichung zwo unmögliche Wurzeln hat, so gibt das Verfahren 699; solche auch mit, nebst der möglichen (707).

Bew. Es hat alsdenn x nebst dem Werthe $m + n$ der aus zween möglichen Theilen besteht, nach 240. auch folgende beyde:

$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\} m \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) + n \cdot \left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$

woraus $-\frac{(m+n) \pm (m-n)\sqrt{-3}}{2}$

wird; da der unmögliche Theil, weil m; n; nicht einerley sind, sich nicht aufhebt.

711. Zus. Wenn man aus den drey Werthen von x (709) die Wurzelgleichungen (220) macht, und

und multiplicirt so kömmt $x^3 - 3(PP + QQ)x - 2(P^3 - 3PQQ) = 0$ Aber $PP + QQ = \sqrt[3]{AB}$ (702) $= \frac{1}{3}a$ (699) und $P^3 - 3PQQ = K$ (702) $= \frac{1}{2}b$ (699) also verwandelt sich die Gleichung in $x^3 - ax - b = 0$ welches die 699. ist.

712. Zus. Eben die nur gefundene Gleichung lässt sich auch so ausdrucken $x^3 - 3ex - 2K = 0$; Von diesen Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichung ⊙ (702) die Hälften (280).

713. Zus. Auch in 710. lässt sich die Gleichung 699. aus den Wurzelgleichungen machen. Diese Erinnerung findet man in der Maria Gaetana Agnesi, Instituzioni analitiche ad uso della gioventu Italiana T. I. §. 187.

714. Zus. Wenn in 710; $m = n$ also in 699; $c = 0$ so sind die beyden übrigen Werthe von x; jeder $= -m$; und die Gleichung hat also zwo gleiche Wurzeln jede $= -m$; nebst der dritten $= 2m$;

715. Anm. Für diesen Fall ist $\frac{1}{4}bb = \frac{1}{27}a^3$ (699) folglich $\frac{1}{2}b = \left(\frac{a}{3}\right)3:2$ also die Gleichung $x^3 = ax + \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{1}{3}a}$; und ihre Wurzel $2m = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b} = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$. Man kann sich gar leicht dergleichen Exempel in Ra-

tio-

tionalzahlen machen, wenn man für u das Dreyfache eines Quadrates annimmt.

716. Zus. Wenn die Wurzel einer cubischen Gleichung durch $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}b+c)}+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}b-c)}$ ausgedruckt wird, so ist c möglich oder unmöglich, nachdem zwo Wurzeln unmöglich, oder alle drey möglich sind. (701; 705;) und nun entdeckt sich die wahre Ursache, weßwegen es im letztern Falle unmöglich wird; Der angenommene Ausdruck der Wurzel nähmlich, bedeutet alle drey Wurzeln, vermöge des Verfahrens 709; 710; Er kann aber nicht drey mögliche bedeuten, wofern nicht c unmöglich ist (709), denn wenn c möglich ist, giebt er nach 710. zwo unmögliche Wurzeln.

717. Anm. Das 699. angewiesene Verfahren, heisst man Cardans Regel. Cardan hat sie in seiner Algebra vorgetragen, die den Titel führt: Artis magnae sive de regulis algebraicis liber vnus, und mit seinem opere nouo de proportionibus numerorum; motuum &c. zu Basel 1570. fol. herausgekommen ist. In dieser Schrift 1. C. 5. Seite schreibt er die Erfindung der Regel dem Scipio Ferreus von Bononien zu. Sie heisst nach seinem Ausdrucke: capitulum cubi, & rerum, numero aequalium; d. i. nach unserer Art zu reden $x^3+gx=h$ nähmlich die alten Algebraisten heissen ihm, was wir x nennen. Nicolaus Tartalea hat diese Re-

Regel ebenfalls herausgebracht, und dem Cardan mitgetheilet, doch ohne Beweis, den Cardan gefunden hat und beybringt. Cardans Regel in Buchstaben ausgedruckt, sieht etwas anders aus als die gegebene (699) es läſſt sich aber eine leicht auf die andere bringen. Cartesius hat die Formel, die aus Cardans Regel flieſſt, in seine Geometrie gebracht. (III. Buch 92. Seite der Amsterd. Ausg. 1683; oder der Frankfurter 1695) und Franciſc. a Schooten in der Schrift de cubicarum aequat. reſolutione (*) wiederholt, und Huddens Analyſis dazu beygefügt: Wenn aber alle Wurzeln möglich sind, glaubt er, sie habe nicht statt, und lehret diesen Fall durch die Theilung des Winkels in drey Theile auflösen. Man kann die Regel auf verschiedene Arten finden; ich habe (699) Herrn Eulern in ſ. coniectatione de formis radicum aequationum Comm. Ac. Petrop. T. VI. p. 216. §. 3; 4; gefolgt.

718. Anm. Die scheinbare Ungereimtheit (708) hat den Mathematikverſtändigen viel Kopfbrechens verursacht. Newton; Ar. vniu. de Aequat. reductione per diuiſores ſurdos 209. S. von Graveſands Ausg. ſagt: "Wenn es „drey mögliche Wurzeln gäbe, ſo verhielten ſie „ſich

(*) Im Anhange zu ſeinen Commentar. in Geom. Carteſ. in angef. Aufl. 345. S. auch bey der Schrift de organica ſect. con. deſcriptione Lugd. Bat. 1646.

„sich alle gleichgültig zu den Coefficienten der „Gleichung, und würden ohne einigen Unterschied durch x ausgedruckt, daher finde man „keine, weil es nicht möglich sey, sie alle drey „nach diesem Gesetze auszudrücken." Man sieht leicht, daß dieses Nichts gesagt ist: denn überhaupt entsteht eben die Mannichfaltigkeit der Wurzeln daher, daß verschiedene unbekannte Gröſſen gegen die gegebenen, durch welche die Coefficienten bestimmt werden, einerley Verhalten haben, es mögen nun diese unbekannten Gröſſen alle möglich, oder einige unter ihnen unmöglich seyn; wie die Exempel 242. zeigen. Indessen hat diese Stelle Newtons, Fridr. Wilh. Stübnern veranlaſſt, hier eine Anwendung des Satzes des zureichenden Grundes zu finden; weil kein Grund vorhanden wäre, warum sich mehr eine der drey Wurzeln als die andere zeigen sollte. (in seiner 1733. zu Leipzig gehaltenen Disputation contra virium mensuram carteſianam pro leibnitiana §. 134;) Herr Clairaut (in s. Algebra nach Mylius deutscher Uebers. V. Th. VI. und f. §. 302. S.) handelt diese Regel auch ab, und bemerkt, daß die beyden unmöglichen Cubikwurzeln doch wohl eine mögliche Summe geben könnten; weil sich die unmöglichen Gröſſen aufheben könnten. Darauf verwandelt er nach Nicoles Anleitung (Mem. de l' Ac des sc. 1738. p. 99. 100.) jede unmögliche Cubikwurzel in eine unendliche Reihe, und zeigt, daß die unmöglichen Theile, die sich

719. Zuſ. In dem Falle (710) kann m
m und n (699) durch Näherung finden.

Ex. $x^3 = 6x - 40$; Hier iſt $a = 6$
$b = -40$; alſo $cc = 392$; und $x = \sqrt[3]{(-2}$
$+ \sqrt{392}) + \sqrt[3]{(-20 + \sqrt{392})}$ wo m
anfangs die Quadratwurzel und nachgehen
die Cubikwurzeln durch Näherung ausziehe
und alſo den beynahe wahren Werth von x f
den könnte.

720. Zuſ. Wäre aber der eigentliche We
von x rational; ſo würde man ihn durch die
Verfahren nicht finden.

Im Exempel; iſt $392 = 98 . 4 = 14 .$
$4 = 2 . 7 . 7 . 4$; alſo $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$; N
aber iſt $(-2 \pm \sqrt{2})^3 = -20 \pm 14\sqrt{2}$
wie man ſich durch die Probe verſichern kan
ohne daß ich hier zu zeigen nöthig hätte, w
es gefunden wird; Alſo kömmt $x = -2 +$
$\sqrt{2} - \sqrt{2} = -4$

721. Zuſ. In 208. aber; wo ſich die Nä
herung (719) nicht anbringen läſſt, müſſ
man, wofern die Regel brauchbar ſeyn ſollte, e
ne Methode haben, die Cubikwurzel aus $K \pm L$
(702) auszuziehen, oder das dortige P und Q
zu finden. Die 702. u. f. gebrauchte Metho
dient nicht dazu, denn ſie führt, P zu finde
auf eine Gleichung, die nichts einfacher iſt a
diejenige, deren Wurzeln man durch die Car
niſche Formel finden ſoll (712).

722

welche nach des Nicole Verfahren die Summe zwoer Reihen mit unmöglichen Gliedern ist, lauter mögliche Glieder enthält, so müsste man doch noch untersuchen, wie es mit den Ergänzungen der Reihen aussähe, und ob dieselben wenn sie unmöglich wären sich auch aufhüben.

720. Anm. Uebrigens hat eine Erinnerung wie des Nicole seine, schon Leibniz 1696. gemacht, (s. seinen Brief an Wallisen Wallis. Op. T. III. coll. epist. 27.) daß sich nähmlich die unmöglichen Grössen in der Summe, wie er redet, virtualiter aufheben, daher Nicole sich mit Unrecht rühmet, solches zuerst gesehen zu haben. König; (Mem. de l'Ac. de Prusse 1749; p. 108) hat diese Erscheinung einer Unmöglichkeit, die er für etwas wirkliches hält, gar aus der Logik wie Stübner aus der Metaphysik erklären wollen, daß also nur noch ein Philosoph fehlt, der die Moral hier zu Hülfe ruft. König zeigt nähmlich, die gemeine Analysis, durch welche man diese Regel findet, setze etwas zum voraus, das auf eine Unmöglichkeit führe, wenn alle drey Wurzeln möglich sind: also hofft er, würde man durch eine Verbesserung der Analysis eine Formel, wo diese Ungereimtheit nicht statt fände, entdecken. Aber Harriot, Wallis (Algebr. 45; 46; Cap. Op. Vol. II.) Euler; Landen (Mathem. Lucubr. P. VI.) haben, jeder durch eine eigne Analysis, eben die Formel herausgebracht, und aus 716. erhellt, daß sich keine andere herausbringen lässt.

719. Zuſ. In dem Falle (710) kann man m und n (699) durch Näherung finden.

Ex. $x^3 = 6x - 40$; Hier iſt $a = 6$; $b = -40$; alſo $cc = 392$; und $x = \sqrt[3]{(-20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(-20 - \sqrt{392})}$ wo man anfangs die Quadratwurzel und nachgehends die Cubikwurzeln durch Näherung ausziehen, und alſo den beynahe wahren Werth von x finden könnte.

720. Zuſ. Wäre aber der eigentliche Werth von x rational; ſo würde man ihn durch dieſes Verfahren nicht finden.

Im Exempel; iſt $392 = 98.4 = 14.7.4 = 2.7.7.4$; alſo $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$; Nun aber iſt $(-2 \pm \sqrt{2})^3 = -20 \pm 14\sqrt{2}$ wie man ſich durch die Probe verſichern kann, ohne daß ich hier zu zeigen nöthig hätte, wie es gefunden wird; Alſo kömmt $x = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -4$

721. Zuſ. In 208. aber; wo ſich die Näherung (719) nicht anbringen läſſt, müſſte man, wofern die Regel brauchbar ſeyn ſollte, eine Methode haben, die Cubikwurzel aus $K \pm \lambda$ (702) auszuziehen, oder das dortige P und Q zu finden. Die 702. u. f. gebrauchte Methode dient nicht dazu, denn ſie führt, P zu finden, auf eine Gleichung, die nichts einfacher iſt als diejenige, deren Wurzeln man durch die Cardaniſche Formel finden ſoll (712).

722.

722. Zuſ. Man könnte auf eine ähnliche Art, wie in 702. verfahren worden, auch die Cubikwurzel aus einer zweytheilichten Gröſſe ſuchen, deren ein Stück rational, das andere irrationyal, aber möglich iſt. Man müſſte für dieſe Cubikwurzel einen Ausdruck annehmen, der aus einem rationalen und einem irrationalen Theile beſtünde, auf beyden Seiten cubiren, und das Rationale unter ſich, das Irrationale auch unter ſich gleich ſetzen. Aber auch ſo würde man die beyden Theile des angenommenen Ausdrucks, die man ſuchte, durch eben ſo eine cubiſche Gleichung finden, wie die iſt, zu deren Auflöſung nach Cardans Regel man eine ſolche Rechnung anſtellen wollte. So macht es Wolf El. Analyſ. §. 360; die Cubikwurzel aus $20 + \sqrt{392}$ zu finden; löſet er die Gleichung $z^3 - 6z = 40$ auf; wo der Werth von z; wie er durch Verſuche (nach 294) findet, 6 iſt, und daraus findet er die geſuchte Cubikwurzel $2 + \sqrt{2}$; dieſe Cubikwurzel nun wollte er deßwegen wiſſen, weil Cardans Formel auf ſie führt, wenn man dadurch die Gleichung $x^3 - 6x = 40$ auflöſen will. Hätte er nicht unmittelbar den Werth von x in dieſer Gleichung eben ſo leicht gefunden?

723. Anm. Die Analyſten haben Methoden geſucht aus einer zweytheilichten Gröſſe, deren einer Theil rational, der andere irrational iſt, Wurzeln von jedem Grade auszuziehen, ſo

di medesimo autore, citata in questa letter
Bonon. 1787; 57. Quartseiten.

Allgemeine Formeln der Differenzen und Summen.

724. Aufg. Wenn eine Reihe nach e
nem gewissen Gesetze fortgehender Grö
sen als eine Hauptreihe (series primitiua) g
geben ist, eine allgemeine Formel zu fi
den, die jedes Glied jeder Reihe der Un
terschiede durch die Glieder der Hauptre
he ausdrückt. Das Verfahren 309; 310
ist ein besonderer Fall hievon.

würdig wäre, die sich die Algebraisten gegeben haben, eine Schwürigkeit bey ihr zu heben, die nicht vorhanden ist. So wird ihre Theorie, wie ich sie hier vorgetragen habe, auch denjenigen nicht unangenehm seyn, der sich mit ihrer wirklichen Anwendung nicht beschäfftigen will, nachdem wir bequemere Arten haben, die rationalen und irrationalen Wurzeln zu finden. Landen a. a. O. hat noch die Bemühung übernommen, eine solche Regel für cubische Gleichungen zu finden, wo das zweyte Glied nicht fehlt, wovon ich wie in (513) urtheilen muß. Man hat auch ähnliche Regeln für die biquadratischen Gleichungen gesucht, und Herr Euler hat auf diese Formeln eine Muthmassung gegründet, wie die Wurzeln der Gleichungen überhaupt aussehen möchten (s. 717.). Die vorhergehenden Betrachtungen habe ich meistens in einem 1767. hier herausgegebenen Programma Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere cet. vorgetragen. Sonderbar ist, daß man in Italien noch in neuern Zeiten sich mit dieser Untersuchung viel zu thun gemacht hat. Von mehr Schriften, die ich nicht alle aufsuchen mag, erwähne ich nur eine: Osservazioni del Signor Sebastiano Canterzani, sul Valor Cardanico; esposte in una lettera, diretta al nobil uomo Signor Canonico Girolamo Saladini, in occasione d'essere uscito un foglio anonimo, che propone una maniera di ridurre il caso irreducibile, aggiungesi la dissertazione

di medesimo autore, citata in questa lettera. Bonon. 1787; 57. Quartseiten.

Allgemeine Formeln der Differenzen und Summen.

724. Aufg. Wenn eine Reihe nach einem gewissen Gesetze fortgehender Grössen als eine Hauptreihe (series primitiua) gegeben ist, eine allgemeine Formel zu finden, die jedes Glied jeder Reihe der Unterschiede durch die Glieder der Hauptreihe ausdrückt. Das Verfahren 309; 310; ist ein besonderer Fall hievon.

und weil das zweyte Glied der ersten Reihe der Unterschiede eben so durch der Reihe y drittes und zweytes Glied bestimmt wird, wie das erste Glied der Reihe der Differenzen, durch der Reihe y zweytes und erstes Glied; so ist $2\Delta 1 = y2 - y1$; also den Unterschied zwischen diesen beyden Gliedern der ersten Reihe der Unterschiede genommen; das erste Glied der zweyten Reihe der Unterschiede oder $1V2 = y2 - 2.y1 + y$. (Hier ist zu merken, daß ein Punct zwischen y und einer Zifer die Multiplication anzeigt; z. E. 2. y1 bedeutet zweymahl das Glied y1.) Nun ist klar, daß das zweyte Glied der zweyten Reihe der Unterschiede, auf eben die Art wie das erste ausgedrückt wird, nur daß man in dem Ausdrucke des ersten Gliedes, statt jedes Gliedes der Hauptreihe, das nächstfolgende setzt: Solchergestalt wird $2\Delta 2 = y3 - 2.y2 + y1$ und hievon $2\Delta 1$ abgezogen läßt $1\Delta 3 = y3 - 3.y2 + 3.y1 - y$ daraus wird $2\Delta 3 = y4 - 3.y3 + 3.y2 - y1$ und folglich $1\Delta 4 = y4 - 4.y3 + 6.y2 - 4.y1 + y$.

IV) Das Gesetz also, welches die berechneten Glieder angeben, läßt sich allgemein so ausdrücken:

$$1\Delta n = yn - n.yn-1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.yn-2 \ldots$$

$$2\Delta n = yn + 1 - n.yn + \frac{n.(n-1)}{1.2}.yn-1 \ldots$$

Hier-

Aufl. I) K; L; u. ſ. w. ſind nach einander folgende Glieder der Hauptreihe, unter I; II; u. ſ. w. ſtehen die Reihen der erſten, zweyten, u. ſ. Unterſchiede. Es fällt in die Augen, daß die Coefficienten der Reihen der Differenzen, oder die Zahlen, welche daſelbſt in die Glieder der Hauptreihe multiplicirt ſind, ſo weit man ſie hier berechnet hat, mit den Binomialcoefficienten einerley ſind. Bey der erſten Reihe der Unterſchiede ſind die Coefficienten 1; 1; bey der zweyten, dritten, vierten, aber, die von der zweyten, dritten, vierten Potenz. Dieſes entdeckt das Geſetz, nachdem jedes Glied jeder Reihe der Unterſchiede gemacht wird, und man hat ſich nur noch von der Allgemeinheit dieſes Geſetzes zu verſichern.

II) Dieſes bequemer zu bewerkſtelligen, ſo heiſſe jedes Glied der Hauptreihe y, aber mit einer begeſchriebenen Zahl; ſo daß dieſer Buchſtabe allein, ein gewiſſes unbeſtimmtes, Glied der Hauptreihe anzeigt, das ich als das erſte anſehen will; y 1 ſein nächſtfolgendes oder das zweyte; y 2 das auf dieſes folgt, oder das dritte; u. ſ. w. y n das n + 1te; dieſe Zahlen 1; 2; ... n bedeuten alſo die Stellen der Glieder, und ſind nicht als Factoren, die in y multiplicirt wären, anzuſehen.

III) Ferner bedeute $\Delta 1$ die erſte Reihe der Differenzen, und $1\Delta 1$ ihr erſtes $2\Delta 1$ ihr zweytes Glied u. ſ. w. So iſt $1\Delta 1 = y1 - y$;

und

und weil das zweyte Glied der ersten Reihe der Unterschiede eben so durch der Reihe y drittes und zweytes Glied bestimmt wird, wie das erste Glied der Reihe der Differenzen, durch der Reihe y zweytes und erstes Glied; so ist $2\Delta 1 = y2 - y1$; also den Unterschied zwischen diesen beyden Gliedern der ersten Reihe der Unterschiede genommen; das erste Glied der zweyten Reihe der Unterschiede oder $1V2 = y2 - 2.\,y1 + y$. (Hier ist zu merken, daß ein Punct zwischen y und einer Zifer die Multiplication anzeigt; z. E. $2.\,y1$ bedeutet zweymahl das Glied y1.) Nun ist klar, daß das zweyte Glied der zweyten Reihe der Unterschiede, auf eben die Art wie das erste ausgedrückt wird, nur daß man in dem Ausdrucke des ersten Gliedes, statt jedes Gliedes der Hauptreihe, das nächstfolgende setzt: Solchergestalt wird $2\Delta 2 = y3 - 2.\,y2 + y1$ und hievon $2\Delta 1$ abgezogen läßt $1\Delta 3 = y3 - 3.\,y2 + 3.\,y1 - y$ daraus wird $2\Delta 3 = y4 - 3.\,y3 + 3.\,y2 - y1$ und folglich $1\Delta 4 = y4 - 4.\,y3 + 6.\,y2 - 4.\,y1 + y$.

IV) Das Gesetz also, welches die berechneten Glieder angeben, läßt sich allgemein so ausdrücken:

$$1\Delta n = yn - n.\,yn-1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\,yn-2 \ldots$$

$$2\Delta n = yn + 1 - n.\,yn + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\,yn-1 \ldots$$

Hier-

Hieraus folgt

$$1\Delta n + 1 = yn + 1 - (n+1).yn + \frac{(n+1).n}{1.2} yn - 1 \ldots$$

V) Den Beweis allgemein zu machen, betrachte man die Sache folgendergestalt. Die Theile des ersten Gliedes von der nten Reihe der Unterschiede, oder die Theile von $1\Delta n$ sind: ein erster und die folgenden (wie 121) nach dem Gesetze nun das ich für Δn in IV. annehme, sind der rte und der $r+1$ te Theil der folgenden; $\pm \frac{n.(n-1)\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}$

$y\,(u-r) \pm \frac{P.(n-r)}{r+1.y}.(n-r-1)$

(134. 135.) P bedeutet nähmlich den Coefficienten bey $y\,(n-r)$ ohne sein Zeichen betrachtet. Da nun $2\Delta n$ aus $1\Delta n$ entsteht, wenn man in des letztgenannten Ausdrucke überall das folgende Glied der Hauptreihe statt des vorhergehenden schreibt, so ist der $r+1$ te Theil von $2\Delta n$

$$\mp \frac{P.(n-r)}{r+1}.y\,(n-r).$$

VI) Zieht man also von diesem Theile den rten der folgenden in $1\Delta n$ ab, weil solcher eben das Glied der Hauptreihe enthält, so bekömmt man

$$\mp P.\left(1 + \frac{n-r}{r+1}\right).y\,(n-r) \text{ aber } 1 + \frac{n-r}{r+1} = \frac{n+1}{r+1}$$

also wird das, was man gefunden hat;

$$\mp(n+1).$$

$$\frac{+(n+1).\,n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \ldots\quad r+1}$$

y (n — r) bejaht oder verneint, nachdem r ungerade oder gerade iſt.

VII) Dieſes gefundene aber iſt der (r + 1)te Theil der folgenden, von 1Δ (n + 1). Denn jeder Theil in 1Δ (n + 1) iſt das, was herauskömmt, wenn man von dem eben ſovielten in 2Δn; denjenigen in 1Δn abzieht, der um eine Stelle weiter vorwärts liegt; dieſes gründet ſich darauf, daß die genannten beyden Theile in 2Δn und 1Δn einerley Glied der Hauptreihe enthalten, weil der 1; 2; 3; u. ſ. w. Theil von Δ1; das n + 1te; nte; n — 1te u. ſ. w. Glied der Hauptreihe enthalten, oder weil die Glieder der Hauptreihe in den Theilen von 1Δ rückwärts gehen; weil ferner 2Δn aus 1Δn wird, wenn man in 1Δn; ſtatt jedes Gliedes der Hauptreihe, das ſich in ihm befindet, das nächſtfolgende ſetzt, und folglich jeder Theil von 2Δn das Glied der Hauptreihe enthält, das der eben ſovielte Theil von 1Δn enthielte, der um eine Stelle weiter vorwärts lag. Auch iſt ferner klar, daß der erſte Theil von 1Δn (n + 1) einerley mit dem erſten Theile von 2Δn iſt, weil der erſte Theil von 2Δn aus der nur angeführten Urſache, keinen ſeines gleichen in 1Δn hat: der zweyte, dritte, vierte u. ſ. w. Theil von 1Δ (n + 1) kommen heraus, wenn man von dem zweyten, dritten, vierten u. ſ. w. Theile

le in $2\Delta n$, den ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Theile in $1\Delta n$ abzieht. Also hat man durch diesen Abzug in VI; überhaupt den $(r+1)$-ten folgenden Theil in $1\Delta(n+1)$ gefunden.

VIII) Setzt man aber $n+1$ statt n in den Ausdruck des $r+1$ten folgenden Theiles in $1\Delta n$ (V) wo man erstlich, ehe man dieses thut, statt P seinen Werth setzen muß; so kömmt eben das heraus, was man am Ende von VI. gefunden hat. Folglich giebt der Abzug VI; eben den Ausdruck, für jeden unbestimmten Theil von $1\Delta(n+1)$ wie man bekömmt, wenn man $n+1$ statt n; in eben den eben sovielten Theil von $1\Delta n$ setzt. Ist also das IV. angenommene Gesetz für $1\Delta n$ und daher auch für $2\Delta n$, richtig, so ist es auch für $1\Delta(n+1)$ richtig; denn wenn es für $1\Delta n$ und für $2\Delta n$ richtig ist, so folgt daraus durch den Abzug des ersten Gliedes vom zweyten, ein solcher Ausdruck für $1\Delta(n+1)$, den man ebenfalls erhält, wenn man $n+1$ statt n in $1\Delta n$ setzt, d. i. wenn man das für $1\Delta n$ angenommene Gesetz unmittelbar, ohne diesen Abzug vorzunehmen, auf $1\Delta(n+1)$ anwendet.

IX) Nun ist das angenommene Gesetz richtig, wenn $n = 1; = 2; = 3; = 4;$ (IV) also ist es für $4+1 = 5$ richtig; und folglich für $5+1 = 6$; u. s. w. ohne Ende nach der schon gebrauchten Art zu schliessen (139; 224;).

X) Al-

X) Also läßt sich das erste Glied jeder Reihe der Unterschiede überhaupt, wie in IV. ausdrücken.

XI) Man kann eben diesen Ausdruck, noch anders folgendergestalt ordnen: Es sey $C1 = n$; $C2 = \frac{n.(n-1)}{1.2}$; $C3 = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2-3}$; u. s. w. $C(2r-1)$ der $2r-1$te Binomialcoefficient der Potenz n; $C2r$ der $2r$ter. Die Coefficienten nach (25) gezählt. So ist erwiesener maassen

$1\Delta n = yn - C1.y(n-1) + C2.y(n-2)...$
$-C(2r-1).y(2r-1) + C2r.y2r.... \pm y$

wo die ganze Reihe $n+1$ Glieder hat, die Zeichen der Glieder abwechseln, und also im letzten Gliede $\pm y$, das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem $n+1$ ungerade oder gerade, das ist, nachdem n gerade oder ungerade ist. Nun ist (Analys. 150) $C1 = C(n-1)$; $C2 = C(n-2)$ und $C(2r-1) = C(n-2r+1)$; $C2r = C(n-2r)$. Man kann also diese Reihe für $1\Delta n$ rückwärts mit eben den Coefficienten schreiben, $Cn = 1$ das vorhin zu $\pm y$ gehörte muß jetzt zu yn gehören. Da sieht denn die Reihe so aus

$1\Delta n = \pm y \mp C1.y1 \pm C2.y2 \mp C3.y3 \pm$
$C4.y4....\mp C(2r-1).y(2r-1) \pm C2r.y2r...$

Ist nun hier n gerade, so gelten die obern Zeichen, und alsdenn wird einmahl $2r = n$; und $C2r = Cn = 1$; und da bey den obern Zeichen,

cient ist R + S den man in 136. findet, m
man nur dorten S; R; n; r; statt Q; P; m
schreibt. Er wird also

$$\frac{(n+1).n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\quad r+1}$$

So findet man den Coefficienten des r + 1
folgenden Theils in y (n + 1) aus dem
genommenen Gesetze für y n.

V) Aber wenn man n + 1 statt n; i
den Coefficienten des (r + 1) ten folgen
Theil von y n; setzt, so kömmt aus der II. a
nommenen Formel, eben das heraus; und
in den Coefficienten multiplicirt wird, nähml
1 Δ (r + 1) ist auch beydemahl einerley;
wird jeder folgende Theil von y (n + 1) d
den Schluß IV; aus dem angenommenen Ge
II, vollkommen so bestimmt, wie er bestim
wird, wenn man in die Formel III; n + 1
n setzt. Das ist: das II. angenommene
setz gilt für y (n + 1) wenn es für y n
Es gilt aber für y 3 (1) folglich für y 4 u. s.
ohne Ende.

726. Anm. Die hier gelehrten Formel
(724; 725) findet man bey verschiedenen Schr
stellern, z. E. Hausen El. Ar. Pr. XXIII. Eu
Inst. Calc. diff. Cap. I. §. 10; 23; aber ih
Allgemeinheit wird von allen, die ich kenn
nur aus der Induction angenommen, daher
mich hier bemühet habe sie mit gehöriger Schä
fe zu erweisen.

Be

II) Man findet also schon in den berechneten Gliedern folgendes Gesetz

$$y\,n = y + A.\,1\Delta 1 + B.\,1\Delta 2 + C\,1\Delta 3 \ldots + R.\,1\Delta r + S.\,1\Delta(r+1)\ldots$$

Wo A; B; C; u. s. w. die Binomialcoefficienten der Potenz n; und zwar R der rte in der Bedeutung (125) S der r + 1 te sind.

III) Weil nun y (n + 1) gegen die zweyten Glieder der Reihen vollkommen eben die Lage hat wie y n gegen die ersten, so wird, wofern das (II) angenommene Gesetz wahr ist, auch folgendes wahr seyn. $y(n+1) = y2 + A.\,2\Delta 1 \ldots + R.\,2\Delta r + S.\,2\Delta(r+1)$ Die Binomialcoefficienten ändern sich hier nicht, weil der Reihen zweyte Glieder in Absicht auf y (n + 1) das sind, was die ersten in Absicht auf y n waren.

IV) Nun entsteht jeder Differenzenreihe zweytes Glied, wenn man zum ersten Gliede dieser Reihe das erste der folgenden addirt. Also findet sich der Werth von y n + 1 folgendergestalt

$$\begin{aligned} &y + 1\Delta 1 \\ &+ A.\,1\Delta 1 + A.\,1\Delta 2 \\ &\qquad + B.\,1\Delta 2 + B.\,1\Delta 3 \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + R.\,1\Delta r + R.\,1\Delta(r+1) \\ &\qquad\qquad\qquad + S.\,1\Delta(r+1) \end{aligned}$$

Jeder folgende Theil von y (n + 1) besteht also aus zwey Stücken, und der (r + 1) te Coeffi-

cient ist R + S den man in 136, findet, wenn man nur dorten S; R; n; r; statt Q; P; m; n; schreibt. Er wird also

$$\frac{(n+1).n.(n-1)....(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3....\quad r+1}$$

So findet man den Coefficienten des r + 1ten folgenden Theils in y (n + 1) aus dem angenommenen Gesetze für y n.

V) Aber wenn man n + 1 statt n; in S, den Coefficienten des (r + 1) ten folgenden Theil von y n; setzt, so kömmt aus der II. angenommenen Formel, eben das heraus; und was in den Coefficienten multiplicirt wird, nähmlich 1 Δ (r + 1) ist auch beydemahl einerley; Also wird jeder folgende Theil von y (n + 1) durch den Schluß IV; aus dem angenommenen Gesetze II, vollkommen so bestimmt, wie er bestimmt wird, wenn man in die Formel III; n + 1 statt n setzt. Das ist: das II. angenommene Gesetz gilt für y (n + 1) wenn es für y n gilt. Es gilt aber für y 3 (I) folglich für y 4 u. s. w. ohne Ende.

726. Anm. Die hier gelehrten Formeln, (724; 725) findet man bey verschiedenen Schriftstellern, z. E. Hausen El. Ar. Pr. XXIII. Euler Inst. Calc. diff. Cap. I. §. 10; 23; aber ihre Allgemeinheit wird von allen, die ich kenne, nur aus der Induction angenommen, daher ich mich hier bemüht habe sie mit gehöriger Schärfe zu erweisen.

s man etwa summiren könnte, Glieder in dies Stellen zu finden.

729. Zus. Wenn man eine der 2; 3; u. s. olumnen als eine Hauptreihe (724) ansieht, ist allemahl $y = 0$.

730. Die zweyte Columne als Hauptreihe trachtet, hat zum ersten Gliede ihrer ersten ifferenzenreihe, das zweyte Glied der ersten olumne, der 1; die folgenden Differenzen sind le $= 0$; also ist für sie aus 725. II. das $n+$ te Glied (724. II.) oder $yn = A = n$; z. E. ir $n = 11$ ihr zwölftes Glied $= 11$.

731. Die dritte, als Hauptreihe, hat für $\Delta 1$ oder den Unterschied ihres ersten und zweyten Gliedes $0 - 0 = 0$ das erste Glied der weyten; folglich für $2\Delta 1 - 1\Delta 1$ oder $1 -$ $1 = 1 = 1\Delta 2$; folglich $yn = B = \frac{n.(n-1)}{1.2}$;

ihr zwölftes Glied $= \frac{11.10}{2} = 55$.

732. In der mten Columne als Hauptreihe betrachtet, ist yn so wie jedes vorhergehende Glied dieser Columne $= 0$ so lange $n < m - 1$ weil in ihr die ersten $m - 1$ Glieder jedes $= 0$ sind und yn das $n + 1$te Glied ist, also so lange $= 0$ ist bis $n + 1 = m$.

733. I. Also ist (724 IV) $1\Delta n = 0$ so lange bis $n = m - 1$; oder die ersten Glieder der 1; 2; 3; .... $m - 2$ten Differenzenreihe sind $= 0$. Nun gehen vor der mten Columne $m - 1$ Co-

727. Erkl. Die Zahlen in vorstehender Tafel, die figurirten Zahlen (numeri figurati) sind so geordnet. Die erste Columne oder lothrechte Reihe enthält lauter Einheiten; die zweyte die Summen dieser Einheiten, und also die natürlichen Zahlen, aber so, daß ihr zweytes Glied, dem ersten der ersten Columne gleich oder = 1; das dritte die Summe der ersten beyden Glieder der ersten Columne, das vierte die Summe der ersten drey Glieder u. s. w. ist. Die dritte Columne enthält die Summe der Glieder der zweyten, so daß ihr drittes; viertes; fünftes u. s. w. Glied; nähmlich 1; 3; 6; die Summe der ersten; zwey; drey; vier; Glieder der zweyten Columne, u. s. w. oder $0+1$; $0+1+2$; $0+1+2+3$; u. s. w. ist. So ist überhaupt das $p+1$te Glied der $m+1$ten Columne die Summe von p-Gliedern der mten. Z. E. wenn $m = IX$, und $p = 11$; so ist der Xten Columne 12tes Glied $= 55 = 0+0..+1+9+45 =$ die Summe der ersten 11 Glieder der IX. Columne.

728. Zus. Für $m = p = 1$ ist der zweyten Columne zweytes Glied $= 1$; der dritten drittes, für $m = p = 2$ u. s. w. ist der mten Columne mtes Glied $= 1$; Die Stellen der Glieder darüber werden mit 0 ausgefüllt, weil sie Summen von 0 seyn müssten, indem über dem ersten Gliede der ersten Columne nichts ist,

das

das man etwa summiren könnte, Glieder in dieſe Stellen zu finden.

729. Zuſ. Wenn man eine der 2; 3; u. ſ. Columnen als eine Hauptreihe (724) anſieht, ſo iſt allemahl $y = 0$.

730. Die zweyte Columne als Hauptreihe betrachtet, hat zum erſten Gliede ihrer erſten Differenzenreihe, das zweyte Glied der erſten Columne, der 1; die folgenden Differenzen ſind alle $= 0$; alſo iſt für ſie aus 725. II. das $n+1$te Glied (724. II.) oder $yn = A = n$; z. E. für $n = 11$ ihr zwölftes Glied $= 11$.

731. Die dritte, als Hauptreihe, hat für $1\Delta 1$ oder den Unterſchied ihres erſten und zweyten Gliedes $0 - 0 = 0$ das erſte Glied der zweyten; folglich für $2\Delta 1 - 1\Delta 1$ oder $1 - 0 = 1 = 1\Delta 2$; folglich $yn = B = \frac{n.(n-1)}{1.2}$;

Ihr zwölftes Glied $= \frac{11.10}{2} = 55$.

732. In der mten Columne als Hauptreihe betrachtet, iſt yn ſo wie jedes vorhergehende Glied dieſer Columne $= 0$ ſo lange $n < m+1$ weil in ihr die erſten $m-1$ Glieder jedes $= 0$ ſind und yn das $n+1$te Glied iſt, alſo ſo lange $= 0$ iſt bis $n+1 = m$.

733. I. Alſo iſt (724 IV) $1\Delta n = 0$ ſo lange bis $n = m-1$; oder die erſten Glieder der 1; 2; 3; .... $m-2$ten Differenzenreihe ſind $= 0$. Nun gehen vor der mten Columne $m-1$ Co-

man sich gleich vorlängst schon sehr mit Berechnung dieser Zahlen beschäfftiget hatte. Ein Beweis ist von dem gegenwärtigen unterschieden. Hausen El. Ar. Prop. 25. hat denselben beybehalten und daraus den binomischen Lehrsatz und das Gesetz der Summen und Differenzen (725. 724) hergeleitet, so wie ich diesen Beytrag umgekehrt habe.

Von den Combinationen.

735. Erkl. Wenn man aus einer gegebenen Menge von Dingen, soviel Paare, sonach Dreyen, Vieren, u. s. w. nimmt als sich thun lässt; so heissen solches Combinationen, Combinationen, Conquaternationen; u. s. w. überhaupt Verbindungen und gemeinschaftliche Combinationen nach 2; 3; 4. u. s. w. (Siehe 224.)

736. Man verfahre auf diese Art mit den ersten fünf Buchstaben des Alphabets. Diese geben folgendes.

Für $r = 1, 2, 3$, wird das $1, 2, 3$; wirkliche $\frac{(m-1).(m-2)\ldots 1}{1.2\ldots m-1} = 1$; m; $\frac{(m+1).m}{1.2}$; u. s. w. Diese Formel geht für $m = 1$ oder die erste Columne nicht an; für welche auch der Ausdruck y^n in I; nicht statt findet, denn derselbe gäbe da $\frac{n.(n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots m-1}$ wo der Zähler was Ungereimtes enthält. Die Ursache ist, weil die Voraussetzung 729; für die erste Columne nicht statt findet. Für die erste Columne ist zwar jede Differenz $= 0$; aber y unveränderlich, und also aus 725. $y^n = y.1^n = 1$; wie richtig ist.

So wird das $r$te wirkliche Glied für

m	
2	r
3	$\frac{(r+1).r}{1.2}$
4	$\frac{(r+2).(r+1).r}{1.2.3}$
5	$\frac{(r+3)(r+2).(r+1).r}{1.2.3.4}$

u. s. w. Diese Formeln werden bey den Combinationen und andern Untersuchungen gebraucht.

734. Anm. Dieses Gesetz der figurirten Zahlen hat Jacob Bernoulli zuerst allgemein erwiesen. Art. Conjectandi P. II. cap. III. ob

737. In der Columne I. stehen die einz
nen Sachen; In II. die Paare, die sich aus
3; u. s. w. Dingen nehmen lassen. Es ist k
daß sich zuerst ein Paar aus zwey Dingen n
men läßt, und daß man also, wenn die Z
der Dinge = 1 ist; 0 Paar hat. Kömmt d
dritte Ding dazu, so gibt es mit jedem der b
den vorigen ein neues Paar; und das vierte m
jedem der drey vorigen; zu den Paaren all
die p Dinge geben, kommen noch p neue Pa
re, wenn das p + 1te Ding dazu kömmt, d
Menge dieser neuen Paare also, d. i. das p +
1te Glied der II. Col. ist der Summe von p E
heiten gleich, und ist also 0; 1; 2; 3; 4; u. s.
w. für p = 0; 1; 2; 4; u. s. w. Vergleic
man also die ersten beyden Columnen hier m
den ersten beyden 727. so ist die Menge d
neuen Paare, welche die p + 1te Sache gleic
= p oder das p + 1te oder pte Glied der II.
Col. 727. ist die Zahl der Paare, die sich in
p + 1ten oder pten Gliede der II. Col. 736.
befinden. Die Menge aller Paare, die sich
zusammen aus p Sachen machen lassen, ist also
die Summe von p Gliedern der II. Col. 731.
d. i. das p + 1te Glied der III. Col. das folg
lich ist, n statt p gesetzt, die Menge aller Pa
re, die sich aus n Sachen nehmen lassen, zu
sammen = $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ (731).

738.

738. Bringt man zu jedem der Paare, die aus den vier Dingen a; b; c; d; machen ſen, das fünfte e; ſo hat man alle die Ver- bungen nach 3 die ſich aus dieſen fünf Din- ſo machen laſſen, daß ſich das fünfte zuerſt innen befindet, oder man hat das fünfte Glied III. Col. 736. Eben ſo hat man ihr vier- Glied, oder die Menge aller Verbindungen ch 3 die ſich aus vieren ſo machen laſſen, daß s letzte oder vierte zuerſt darinnen iſt, wenn zu allen Paaren, die ſich aus dreyen ma- n laſſen, das vierte bringt, u. ſ. w. Ich e zuerſt, weil es nachgehends auch in den lgenden Verbindungen vorkömmt, die e ent- lten. Alſo iſt die Menge der Verbindungen 5; im 4; im 3; u. ſ. w. Gliede der III. ol. 736; dem 5; dem 4; dem 3; Gliede der I. Col. 726. u. ſ. w. gleich;

Ueberhaupt, wenn man zu jedem der Paare, e ſich aus n — 1 Dingen machen laſſen, das te bringt, ſo hat man alle Verbindungen nach die ſich aus n Dingen ſo machen laſſen, daß as letzte in ihnen befindlich iſt, oder man hat as nte Glied der III. Col. 736; die Menge er in ihm befindlichen Verbindungen nach 3 iſt lſo mit dem n ten Gliede III. Col. 726. einerley; olglich iſt die Menge aller Verbindungen nach 3 ür n Dinge in der III. Col. 736. zuſammen ſo roß als die Summe von n Gliedern der III. ol. 726; d. i. ſo groß als das n + 1te der daſigen

737. In der Columne I. stehen die einzelnen Sachen; In II. die Paare, die sich aus 2; 3; u. s. w. Dingen nehmen lassen. Es ist klar, daß sich zuerst ein Paar aus zwey Dingen nehmen läßt, und daß man also, wenn die Zahl der Dinge = 1 ist; 0 Paar hat. Kömmt das dritte Ding dazu, so gibt es mit jedem der beyden vorigen ein neues Paar; und das vierte mit jedem der drey vorigen; zu den Paaren also, die p Dinge geben, kommen noch p neue Paare, wenn das p + 1te Ding dazu kömmt, die Menge dieser neuen Paare also, d. i. das p + 1te Glied der II. Col. ist der Summe von p Einheiten gleich, und ist also 0; 1; 2; 3; 4; u. s. w. für p = 0; 1; 2; 4; u. s. w. Vergleicht man also die ersten beyden Columnen hier mit den ersten beyden 727. so ist die Menge der neuen Paare, welche die p + 1te Sache giebt, = p oder das p + 1te oder pte Glied der II. Col. 727. ist die Zahl der Paare, die sich im p + 1ten oder pten Gliede der II. Col. 736. befinden. Die Menge aller Paare, die sich zusammen aus p Sachen machen lassen, ist also die Summe von p Gliedern der II. Col. 731. d. i. das p + 1te Glied der III. Col. das. folglich ist, n statt p gesetzt, die Menge aller Paare, die sich aus n Sachen nehmen lassen, zusammen = $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ (731).

738.

738. Bringt man zu jedem der Paare, die sich aus den vier Dingen a; b; c; d; machen lassen, das fünfte e; so hat man alle die Verbindungen nach 3 die sich aus diesen fünf Dingen so machen lassen, daß sich das fünfte zuerst darinnen befindet, oder man hat das fünfte Glied der III. Col. 736. Eben so hat man ihr viertes Glied, oder die Menge aller Verbindungen nach 3 die sich aus vieren so machen lassen, daß das letzte oder vierte zuerst darinnen ist, wenn man zu allen Paaren, die sich aus dreyen machen lassen, das vierte bringt, u. s. w. Ich sage zuerst, weil es nachgehends auch in den folgenden Verbindungen vorkömmt, die e enthalten. Also ist die Menge der Verbindungen im 5; im 4; im 3; u. s. w. Gliede der III. Col. 736; dem 5; dem 4; dem 3; Gliede der III. Col. 726. u. s. w. gleich;

Ueberhaupt, wenn man zu jedem der Paare, die sich aus n — 1 Dingen machen lassen, das n te bringt, so hat man alle Verbindungen nach 3 die sich aus n Dingen so machen lassen, daß das letzte in ihnen befindlich ist, oder man hat das n te Glied der III. Col. 736; die Menge der in ihm befindlichen Verbindungen nach 3 ist also mit dem n ten Gliede III. Col. 726. einerley; folglich ist die Menge aller Verbindungen nach 3 für n Dinge in der III. Col. 736. zusammen so groß als die Summe von n Gliedern der III. Col. 726; d. i. so groß als das n + 1 te der

dasigen

daſigen vierten, oder $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ (732).

739. Man ſetze, die $q-1$te Columne 736; enthalte die Verbindungen nach $q-1$ von n Dingen a b c ... f g das letzte ſoll nähmlich g; und ſein nächſtvorhergehendes f heiſſen. Ihr nt̃es Glied enthalte die Verbindungen, in denen die nte Sache g zuerſt zu finden iſt, und ſo überhaupt ihr unbeſtimmtes pt̃es, die Verbindungen nach $q-1$ in denen von dieſen n Sachen, die pte zuerſt zu finden iſt. Nun nehme man an, die Menge der Verbindungen in jedem ſolchen pten Gliede, ſey ſo groß als das eben ſovielte oder pte Glied der $q-1$ten Columne 726; kömmt zu jeder ſolcher Verbindung von p Sachen nach $q-1$; die $p+1$te Sache; ſo erhält man die Verbindungen nach q die ſich aus $p+1$ Sachen ſo machen laſſen, daß die $p+1$te zum erſtenmahle darinnen vorkömmt; oder man erhält das $p+1$te Glied der qten Columne 736; dieſes Glied enthält alſo ſoviel Verbindungen nach q von $p+1$ Sachen, ſoviel es zuſammen Verbindungen nach $q-1$ von p Sachen giebt; das iſt, vermöge des Angenommenen, ſoviel die Summe von p Gliedern der $q-1$ten Columne 726 beträgt; das iſt, vermöge der Einrichtung der Reihen 726; ſoviel das $p+1$te Glied der qten Columne 726. beträgt. Es ſtellt aber jedes Glied der 3 Col. 736;

736; die Menge von Verbindungen nach 3 von p Dingen vor, in denen das pte zum erstenmahle vorkömmt, wie aus 736. erhellt, wenn man p statt des dortigen n setzt. Also ist das, was angenommen wird, für $q - 1 = 3$ wahr, und folglich ist, für $q = 4$; wahr, daß die Menge der Verbindungen von $p + 1$ Sachen nach q; welche das $p + 1$te Glied der 4. Col. 736. enthält dem $p + 1$ten Gliede der 4. Col. 726. gleich ist, das heißt, weil p unbestimmt ist, daß die Menge der Verbindungen in jedem Gliede der 4. Col. 736; dem eben sovielten der 4. Col. 726. gleich ist. Nun setze man $q - 1 = 4$; und folglich $q = 5$; so ist erwiesenermassen das Angenommene für die vierten Columnen wahr; die Mengen der Verbindungen nach vieren in jedem Gliede der einen, sind nähmlich dem eben sovielten der andern gleich; also folgt für die fünften Columnen, daß die Mengen der Verbindungen nach fünfen in jedem Gliede der einen, dem eben sovielten der andern gleich sind. Und so geht der Schluß für $q - 1 = 5$; und $q = 6$; für $q - 1 = 6$ und $q = 7$ u. s. w. ohne Ende fort, oder überhaupt ist die Menge der Verbindungen nach q in jedem Gliede der qten Columne 736. so groß als das eben sovielte Glied der qten Col. 726.

740. Die Menge aller Verbindungen nach q von n Dingen, ist also die Summe von n Gliedern der qten Col. 726; oder das $n + 1$te der

q + 1 ten; alſo wenn q + 1 = m (733)

$$= \frac{n.(n-1)\ldots\ldots(n-q+1)}{1.2\ldots\ldots q}$$

741. Ex. Wie viel mahl können aus 40 (=n) Dingen 9 (=q) genommen werden? Antw.

$$\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = 37.$$

32. 19. 17. 13. 11. 5 = 273 438 880.

Wenn Lombre unter dreyen geſpielt wird, ſo kann jeder beym Kartengeben ſoviel verſchiedene Spiele bekommen, ſo vielmahl aus den 40 Karten 9 können genommen werden, ſo daß niemahls alle 9 die er einmahl bekömmt mit allen 9 die er ein andermahl bekömmt einerley ſind. Die Menge dieſer verſchiedenen Spiele, die einer in die Hand bekommen kann, zeigt das Exempel. Dieſe Menge muß noch mit 3 multiplicirt werden, weil eben die Karten ihm ein anderes Spiel geben, nachdem er der erſte, zweyte, dritte, in der Ordnung der Spielenden iſt. Dieſes iſt nur die Menge der möglichen Spiele in Abſicht auf die Karten, welche man in die Hand bekömmt, ohne Betrachtung des Kaufens u. ſ. w.

742. Die Menge der möglichen Fälle, wo man die Spadille und Baſte gleich beym Kartengeben bekommen kann, findet ſich ſo: Man ſucht die möglichen Verbindungen von 38 Blättern nach 7; d. i. man ſucht, wiedielmahl einer 7 Blätter, die nicht alle einerley ſind, aus den

38

38 bekommen kann, welche noch übrig bleiben, wenn die Spadille und Baste davon genommen sind. Dazu die beyden erwähnten gerechnet giebt, wievielmahl er 9 Blätter bekommen kann, daß die erwähnten gegebenen darunter sind. Es erhellt, daß dieses von jedem zwey bestimmten Blättern gilt. Die Rechnung giebt also für

$$n = 38; q = 7; \frac{38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$= 38 \cdot 37 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 8 = 13\,148\,076.$$

743. Vergleicht man diese Fälle mit allen möglichen Spielen (741) und zwar nur die Millionen, um eine Verhältniß, die ohngefähr richtig ist, zu haben, so bekömmt man 13 : 273 oder ohngefähr 1 : 21; Man kann also annehmen, daß unter 21 Fällen überhaupt nur einer ist, da man die erwähnten beyden Blätter bekömmt, oder daß die Wahrscheinlichkeit sie zu bekommen, zu der Wahrscheinlichkeit sie nicht zu bekommen, sich verhält wie 1 : 20.

744. Hätte man sie nicht bekommen, sondern verlangte sie zu kaufen, so müßte man erstlich die möglichen Fälle suchen, da sie sich unter den 13 Karten, die zum Kaufen da liegen, befinden; und nachgehends die Fälle, da sie unter diesen Karten die Stellen einnehmen, daß man sie beym Kauf bekäme; das letztere beruht auf der Berechnung der Versetzungen (51) wenn man z. E. zuerst kaufte und 6 kaufte, so käme es darauf an, wieviel Ordnungen die 13 liegenden

den Blätter überhaupt haben könnten, und wieviel es darunter Ordnungen gäbe, da sich zwey bestimmte Blätter unter den obersten 6 befänden.

745. Hieraus wird begreiflich werden, wie die Lehre von den Verbindungen und Versetzungen (51) dient, mögliche Fälle, und folglich Wahrscheinlichkeiten bey den Spielen auszurechnen, wovon Jac. Bernoulli in s. Arte Conjectandi P. II. gehandelt hat.

II. Bey Spielen ist aus der Natur des Spiels, die Menge aller möglichen Fälle bestimmt, man kann also die Menge derer, die einer gewissen Absicht vortheilhaft sind, berechnen, und mit der Menge aller vergleichen. Das giebt die Wahrscheinlichkeit, einen der vortheilhaften Fälle zu erhalten, wie 743. zeigt. Ein bekanntes Beyspiel hievon ist das genuesische Lotto, wo bey 90 Zahlen 117480 Verbindungen nach Dreyen möglich sind, und in diesen Verbindungen sind nur 10, in denen sich drey, von fünf gegebenen Zahlen befinden. Wer also hofft, daß unter den fünf Zahlen die er gewählt hat, drey herauskommen, der erwartet, daß unter 11748 Fällen, gerade der eintreffen werde, den er wünscht, gegen den 11747 sind. Man s. hierüber unter andern Schriften: Das Lotto di Genoua in seiner wahren Grösse. Philadelphia 1771.

III. In

III. In den Geschäften des menschlichen Lebens, wird die Wahrscheinlichkeit nach Erfahrungen beurtheilt, und man glaubt moralische Gewißheit zu haben, wenn der Fälle für eine Erwartung eine Anzahl ist, gegen welche der entgegengesetzten ihre nicht in Betrachtung kömmt. Berechnung hierüber, lehrt Jacob Bernoulli, Artis coniectandi P. IV. cap. 4. Vom P. Gregorio Fontana findet sich eine hieher gehörige Abhandlung Sopra il computo dell' errore probabile nelle sperienze ed osservazioni, bey seiner Uebersetzung: Compendio d'un corso di lezioni di fisica sperimentale del Sign. Giorgio Atwood, Pavia 1771.

IV. Weil auch hiebey, und bey Anwendungen auf Leibrenten, Wittwencassen u. d. g. Rechnungen vorkommen, die grossentheils auf Combinationen beruhen, erwähne ich einige hieher gehörige Schriften. La dottrina degli Azardi applicata ai Problemi della Probabilità della Vita, delle Pensioni vitalizie, Reversioni, Tontine ec. di Abramo Moivre' trasportata dall' Idioma Inglese . . . . ist zu Mailand 1776. als eine Disputation, vom P. Robert Gaeta, mit Beystand des P. Gregor Fontana vertheidigt worden. Bey dieser Uebersetzung von Moivre's Doctrine of Chances, finden sich sehr viele Zusätze, aus neuern Schriften. Carl Chassot de Florencourt, Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, Altenb. 1781. Joh. Nic. Tetens, Einleitung zur Berechnung der

Leibrenten, und Anwartschaften die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. Leipz. 1785. Die Rechnung des Wahrscheinlichen, aus dem Französischen des Herrn C. F. de Biequilley übersetzt und mit Anmerk. vers. von Christ. Friedr. Rüdiger. Leipz. 1788. Joh. Christian Michelsen, Anleitung zur juristischen politischen und ökonomischen Rechenkunst, Halle 1784. hat Buchstabenrechnung vermieden, und alles durch Zahlenrechnungen bewerkstelligt.

V. Natürlich ist wohl, daß jemand der etwas auf sehr schwache Hoffnung wagt, desto mehr gewinnen muß, wenn es ihm gelingt. Daraus bestimmt man den Werth der Hoffnung in den angezeigten Rechnungen. Daß der Gewinner einer Terne (II) seinen Einsatz bey weitem nicht 11747 mahl erhält, gehört auch unter die Unbilligkeiten des Lotto.

VI. Man nehme an es sey bey einem Spiele, gleich wahrscheinlich: Nichts zu gewinnen, oder 20000 Thaler. Nach (V) kann er bey diesem Spiele 10000 Thaler setzen; denn er verliert sie entweder, oder gewinnt mit ihnen eben soviel.

Es ist nicht zu läugnen, daß dergleichen Spiele gespielt werden, auch wohl noch stärkere. So gar, ... sind Kriege, Spiele, wo der so unsichre Gewinnst oft den Einsatz nicht wieder erstattet.

Ich

Ich denke, mit einem solchen Spiele läßt sich nur jemand ein, der Geld zum Wegwerfen hat, oder zu haben glaubt, oder auch sich entschlossen hat, wenn er unglücklich ist, zu verschwinden.

VII. Nähmlich; die Wahrscheinlichkeit, giebt blos an, was die Hoffnung an sich werth ist. Ob jemand diesen Werth zahlen kann, ohne unglücklich zu seyn wenn er ihn verliert, das geht die Rechnung nichts an. Bey Spielen, bestimmt sie den Werth der Hoffnung eben deßwegen zuverlässig, weil sie annimmt, der Spieler setze nicht mehr auf, als er ohne Unbequemlichkeit missen kann. Diese Annahme ist begreiflich nur deßwegen so oft falsch, weil der Spieler selten mathematisch denkt.

VIII. Man kann also den Werth der Hoffnung, in absoluten und relativen eintheilen. Bey dem letzten, kommen die Umstände dessen in Betrachtung, der Hoffnung kaufen will, wie stark er den Verlust des Kaufgeldes empfinden wird. Eine mathematische Ausführung hierüber giebt Daniel Bernoulli de mensura sortis, Comm. Ac. Petrop. T. V. ad ann. 1730. 31. Man findet sie übersetzt, (nicht von mir) aber das wichtigste mathematische weggelassen, im Hamburgischen Magazine I. Band (1747) 5. Stück. Es sind zuweilen solche Fragen vom Werthe der Hoffnung vorgekommen, wo die Rechnung mit dem gemeinen Menschenverstande zu streiten schien, und nicht allemahl haben Ma-

thematiker diese natürliche Auflösung gewählt, sondern wohl künstlichere und dabey unzureichende. Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beym Spiele zu heben, von Ge. Christoph Lichtenberg, Prof. der Phil. Gött. 1770.

746. Man kann auch Verbindungen berechnen, wo in einer eben die Sache mehr als einmahl vorkömmt. Weil die vollständige und allgemeine Abhandlung für meine gegenwärtige Absichten zu weitläuftig fällt, so will ich dieses nur mit einem Exempel erläutern.

744. Die vier ersten Lautbuchstaben sollen allgemein bejahende und verneinte Sätze bedeuten, wie in der Logik in der Lehre von den Syllogismen gewöhnlich ist. Man fragt, wieviel modi von Syllogismen möglich sind. Die Beantwortung kömmt darauf an, daß man aus diesen vier Buchstaben, soviel Verbindungen nach dreyen macht, als sich machen lassen, worinnen auch jeder zwey oder dreymahl vorkommen kann. Aus diesen Verbindungen aber muß man diejenigen wegwerfen, welche mit den Regeln der Syllogismen nicht bestehen können.

	I	II
1	a	aa
2	e	ae; ee
3	i	ai; ei; ii;
4	o	ao; eo; io; oo

747.

747. Die II. Col. enthält alle Verbindungen nach 2 die sich aus vier Dingen machen lassen, wenn man auch eines wiederhohlen darf. Ihre Glieder sollen jedes die beyden Vordersätze von einem Schlusse vorstellen; Also bedeutet ihr erstes Glied einen Schluß, dessen beyde Vordersätze allgemein bejahend sind; In ihrem zweyten Gliede bedeutet ae zweene Vordersätze, da einer allgemein bejahend, der andere allgemein verneinend ist, es kann aber jeder dieser beyden Sätze der Ober- oder der Untersatz (maior; minor) seyn, oder ihre Ordnung, den Obersatz zuerst genannt, kann ae; ea; seyn. So bedeutet ee daß beyde Vordersätze allgemein verneint sind; und im 3. Gliede; ai daß einer allgemein bejahend, der andere besonders verneinend ist. u. s. w. Setzt man nun also zu jedem Paare der solchergestalt angezeigten Vordersätze einen Schlußsatz, und versetzt die Buchstaben, welche der Vordersätze Beschaffenheit anzeigen, wenn sie sich versetzen lassen; so bekömmt man alle Gattungen von Schlüssen. Um aber keine unnützen mit zu bekommen, so beobachtet man folgende Regeln. I) Aus bloßen verneinenden oder besondern Vordersätzen folgt nichts. II) Der Schlußsatz richtet sich nach dem schwächern Theile. III) Aus bloßen bejahenden Vordersätzen folgt was Bejahendes. Solchergestalt bekömmt man zu

aa; a (1; e und o bleiben weg III. Reg.
i (2
ae; e (3; a und i bleiben weg II. R.

o (4
ai; i (5; III. II. R.
ei; o (6; II. R.
ii; gibt nichts I. R.
ao; o (7; II. R.
eo; io; oo; geben nichts I. Reg.

Nun giebt es in 1 und 2. keine Verſetzung für aa; in jeder der übrigen Claſſen laſſen ſich zwo Ordnungen der Vorderſätze annehmen: alſo giebt jede zwo Gattungen von Schlüſſen. – Alſo kommen überhaupt 2 + 5. 2 = 12 Gattungen von Schlüſſen heraus, die durch die Ordnung und Beſchaffenheit der Sätze unterſchieden ſind. Kömmt aber eine ſolche Gattung in zwo oder mehr Figuren vor, ſo bekömmt ſie in jeder den Nahmen eines eigenen Modi. So gibt

aaa; bArbArA 1 Fig. aai; dArAptI 3 Fig. bAlArI 4 F. aee; cAmeſtres 2 F. cAdErE 4 F. eae; cElArEnt 1 F. cEſArE 2 F. aeo; hat keinen Modum. eao; fElAptOn 3 F. fEgArO 4 F. aii; dArII 1 F. dAtIſI 3 F. iai; dIſAmIs 3 F. dIgAmI 4 F. eio; fErIO 1 F. fEſtInO 2 F. fErIſOn 2 F. fEdIbO 4 F. ieo; hat keinen modum. aoo; bArOcO 2 F. oao; bOcArdO 3 F.

Eine andere Berechnung der modorum der Schlüſſe giebt Leibniz Art Combinatoria Probl. II. p. 13; wo er aber die Sätze in allgemeine, beſondere, unbeſtimmte und einzelne abtheilet. In der nur mitgetheilten Erzählung der Schlußarten,

arten, fehlt keine, die von den logischen Schriftstellern erwähnt wird.

748. I. Combinationen kommen, bey den Coefficienten des binomischen Lehrsatzes, bey der Gleichungen ihren (219) vor. Auch so bey den Coefficienten der Reihen (624. u. f.). Da wird immer der folgende aus den vorhergehenden bestimmt, wenn man in der Reihe weit fortgeht, wird die Zusammensetzung sehr groß, ihr Gesetz schwer zu übersehn, und des Coefficienten Berechnung sehr mühsam. Besonders empfindet man diese Schwürigkeit in der Rechnung des Unendlichen, wo Reihen häufig gebraucht werden.

II. Herr Carl Friedr. Hindenburg, jetzo Prof. der Phys. zu Leipzig, hat durch Anwendung der Combinationen und geschickte Bezeichnungen, der Analysis hie grosse Vortheile verschafft. Die Einrichtung und die Gränzen meines Buches gestatten mir nur die Titel dahin gehöriger Schriften beyzubringen, die man ohnedem doch selbst studiren muß.

III. Car. Frid. Hindenb. Infinitinomi dignitatum, exponentis indeterminati, historia, leges, ac formulae. Acc. Methodus potentiarum, et serierum ab euolutione quotcunque oriundarum geneſis. Gotting. 1779.

Derſ. Noui Syſtematis permutationum. combinationum ac variationum primae lineae, et, logiſticae ſerierum formulis analytico com-

binationis per tabulas exhibendae, conſpectus et ſpecimina. Lipſ. 1781.

War die Einladungsſchrift zu ſeiner Antrittsrede, und iſt vermehrt als ein Buch erſchienen.

Deſſ. Methodus nova et facilis ſerierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati Lipſ. 1778; eine Diſputation.

M. Hieron. Chph. Wilh. Eſchenbach, Diſputation: De Serierum Reuerſione formulis analytico combinatoriis exhibita. Lipſ. 1789.

Ernſt Gottfr. Fiſcher, Prof. d. latein. Sprache an dem vereinigten berliniſchen und cölniſchen Gymnaſium zu Berlin, Theorie der Dimenſionszeichen, nebſt ihrer Anwendung auf verſchiedene Materien aus der Analyſis endlicher Gröſſen. Halle 1792; I. II. Theil.

Heinr. Aug. Töpfer, combinatoriſche Analytik, und Theorie der Dimenſionszeichen, in Parallele geſtellt, Leipzig 1793.

M. Henr. Aug. Rothe, Formulae de Serierum Reuerſione demonſtratio vniuerſalis, ſignis localibus, combinatorio analyticorum vicariis exhibita. eine Diſputation Leipzig 1793. Ein allgemeiner Beweis der in Herrn M. Eſchenbach Diſputation gegebenen Formel.

749. Anm. Die Zahlen der dritten Columne 727. heiſſen Triangularzahlen, der vierten Tetragonalzahlen u. ſ. w. Die alten Algebraiſten

Braisten haben sich sehr mit ihnen beschäfftiget. Ich will noch als eine Anwendung davon nachstehendes beybringen. Den Satz überschrieb mir der verstorbene Herr Prof. Kraft aus Tübingen, daß ich den Beweis davon suchen sollte; den ich auch bald fand.

750. Wofern m eine ganze bejahte Zahl bedeutet, so ist $\frac{2^{4m}+1-2^{2m}-1}{9}$ eine Triangularzahl.

Bew. Wenn N eine ganze Zahl bedeutet, so ist $\frac{2^{2m}-1}{3} = N$, wie aus 243. folgt, wenn $b = 4$, $c = m$; $x = 1$, gesetzt wird. Also ist $2^{4m} = (3N+1)^2$ und $2^{4m}+1 = 18NN + 12N + 2$; hievon $2^{2m}+1 = 3N+2$ abgezogen, läßt $2^{4m}+1-2^{2m}-1 = 18NN+9N = 9N.(2N+1) = 9.\frac{(2N+1).2N}{1.2}$; dieses mit 730. verglichen, giebt $n = 2N+1$ also ist $\frac{2^{4m}+1-2^{2m}-1}{9}$ die $2N+2$te Trigonalzahl.

Für $m = 3$ ist $N = 21$; und $\frac{8192-64-1}{9} = 903 = \frac{43.43}{1.2} = \frac{(2.21+1).2.21}{1.2}$; also ist $n = 2.21+1 = 43$ oder die Zahl ist die 44ste Trigonalzahl.

Man kann diese Untersuchung noch allgemeiner machen, wie ich in den Commentariis Soc. Reg. Scient. Gottingens. T. I. gewiesen habe.

Erweis des Lehrsatzes

von dem Verhalten der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln.

In Newtons *Arithm. Vniuers.* am Ende des Hauptstückes *de transmutationibus aequationum*, auf der 192. Seite der gradesandischen Ausgabe.

751. Man setze, eine Gleichung sey so eingerichtet, daß die höchste Potenz von x zur linken Hand des Gleichheitszeichens alleine und ohne Coefficienten steht, die andern nach der Reihe zur rechten Hand sich befinden, und heisse die Coefficienten auf der rechten Hand α, β, γ, δ, u. s. f. Man nenne ferner R die Summe der Wurzeln, R2 die Summe ihrer Quadrate, R3 die Summe der Cuborum, R4 der Biquadrate, und überhaupt Rr der Potenzen vom Exponenten r, R (r − 1) der Potenzen vom Expon. r − 1 u. s. f. so ist $R = \alpha$, $R2 = \alpha R + 2\beta$, $R3 = \alpha R2 + \beta R + 3\gamma$, $R4 = \alpha R3 + \beta R2 + \gamma R + 5\delta$ und überhaupt $Rr = \alpha R (r-1) + \beta R (r-2) + \gamma R$

(r − 3)

$(r-3)\ldots+\varrho R+r\sigma$. Wo σ den Coefficienten zum Exponenten $m-r$, und ϱ den nächst vorhergehenden, in einer Gleichung vom Grade m bedeutet. Z. Ex. Es sey $x^4 = x^3 + 19xx - 49x + 30$. So ist $\alpha = 1\ \beta = 19.\ \gamma = -49.\ \delta = 30$. Also $R = 1$, $R2 = 1.R + 2.19. = 39$, $R3 = 1R2 + 19.R - 3.49 = 39 + 19 - 147 = -89$, $R4 = 1R3 + 19.R2 - 49.R + 4.30 = -89 + 19.39 - 49 + 120 = 723$. Die Wurzeln der Gleichung aber sind 1, 2, 3, und -5; also ist allerdings $R = 1 + 2 + 3 - 5 = 1$; $R2 = 1 + 4 + 9 + 25 = 139$. $R3 = 1 + 8 + 27 + 125 = -89$, $R4 = 1 + 16 + 81 + 625 = 723$. Newton hat diesen Satz am angeführten Orte ohne Beweis erwähnt. Johann Bernoulli (*), und Herr Euler (**) brauchen ihn, die Summen gewisser Reihen zu finden, und der erste sagt, daß er einen Beweis davon hätte, der aber in seinen Werken nicht anzutreffen ist. Bärmann, der 1769. als Professor der Mathematik zu Wittenberg starb, hat einen Beweis davon in der Schrift gegeben, mit der er 1745. den Antritt seines Lehramts angekündiget (***). Folgende Schlüsse, die, wie die Vergleichung leicht

(*) *Op. T. IV.* n. 153. *art.* 8.
(**) *Act. Petrop. T. VII.*
(***) *Demonstratio theorematis Algebraici. Vit.* 1745. 2. Bog.

leicht zeigen wird, mit Bärmanns seinen nichts gemein haben, scheinen mir ebenfalls die Sache kurz und deutlich darzuthun. Ich kam auf sie, beym Durchlesen seines Programms, wo ich seinen mir etwas verwickelten Beweis durchzudenken nicht Geduld hatte, und schickte ihm das Wesentliche davon gleich den Tag darauf als ich das Programm von ihm bey seinem Aufenthalte in Leipzig bekommen hatte.

I. Satz.

Das Verhalten zwischen den Summen der Potenzen der Wurzeln und den Coefficienten in einer cubischen Gleichung zu finden.

Aufl. Wenn die Wurzeln einer cubischen Gleichung g, h, k, sind, also daß $x - g = 0$, $x - h = 0$, $x - k = 0$ so wird die Gleichung seyn

$$\begin{array}{llll} x^3 & - g & + gh & \\ & - hx^2 & + gkx & - ghk = \\ & - k & + hk & \end{array}$$

Nun sey eine cubische Gleichung überhaupt $x^3 - Ax^2 - Bx - C = 0$ so ist $g + h + k = A$. $gh + gk + hk = -B$ und $ghk = C$. Folglich $AA = gg + 2gh + hh + 2gk + 2hk + kk = gg + hh + kk - 2B$. Also $AA + 2B = gg + hh + kk$. Das ist A. $(g + h + k) + 2B = gg + hh + kk$. Ferner, wenn man für x erstlich g, nachgehends h, und endlich k setzt.

$g^3 =$

$$g^3 = Agg + Bg + C$$
$$h^3 = Ahh + Bh + C$$
$$k^3 = Akk + Bk + C$$

$$g^3 + h^3 + k^3 = A(gg + hh + kk) + B.(g + h + k) + 3C$$
$$= A.(AA + 2B) + BA + 3C$$

II. Satz.

Es sey $x^m = \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots + \delta x^{m-n+1} + \varepsilon x^{m-n} + \zeta x^{m-n-1} \ldots + \pi x^{m-r+2} + \varrho x^{m-r+1} + \sigma x^{m-r} \ldots + \omega$

Für welche Gleichung ich das Zeichen ⊙ gebrauchen will. Es seyn ferner g, h, ... k, die Wurzeln dieser Gleichung, so daß die erste g die letzte k ist, ihre Zahl wird m seyn. Man nenne ferner ihre Summe $g + h \ldots + k = R$ die Summe ihrer Quadrate $g^2 + hh \ldots + kk = R2$ und überhaupt die Summe der Potenzen u, nähmlich $g^u + h^u \ldots k^u = Ru$. Es wird die Verhältniß zwischen den Coefficienten der Gleichung und der Summe von den Potenzen m, der Wurzeln gesucht.

Aufl. Wenn man verfährt, wie am Ende des vorigen Satzes, so erhält man

$g^m =$

$$g^m = \alpha g^{m-1} + \beta g^{m-1} \ldots + \omega$$
$$h^m = \alpha h^{m-1} + \beta h^{m-2} \ldots + \omega$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$k^m = \alpha k^{m-1} + \beta k^{m-2} \ldots + \omega$$

$$Rm = \alpha Rm-1 + \beta . Rm-2 + \gamma . Rm-3 \ldots + m . \omega$$

III. Satz.

Newtons Formel die ich künftig $\mathfrak{N}$ bezeichnen werde, ist

$$Rr = \alpha Rr-1 + \beta Rr-2 \ldots \delta Rr-n+1 + \varepsilon Rr-n + \zeta Rr-n-1 \ldots + \varrho R + r . \sigma$$

Man nehme an, diese Formel gelte für die Gleichung $\odot$ vom Grade m, dergestalt daß sie eintrifft, man mag setzen $r = m$, $r = m-1$. $r = m-2$. u. s. f. Wenn dieses ist, so wird auch folgen, daß sie auch für die nächst höhere Gleichung vom Grade $m+1$ gilt.

Beweis. Zu den Wurzeln der Gleichung des II. S. komme noch die $m+1$te $x = l$. so wird die Gleichung des II. S. auf c gebracht, und mit $x - l$ multiplicirt folgendes geben.

$x^m -$

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} \ldots - \delta x^{m-n+1} - \varepsilon x^{m-n} - \zeta x^{m-n-1} \ldots - \pi x^{m-r+2} - \varrho x^{m-r+1} - \sigma x^{m-r} \ldots \ldots \ldots - \omega = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x^{m+1} - (\alpha+1)x^m - (\beta-\alpha 1)x^{m-1} \ldots\ldots - (\varepsilon - \delta 1)x^{m-n+1} - (\zeta - \varepsilon 1)x^{m-n} \ldots\ldots - (\varrho - \pi 1)x^{m-r+2} - (\sigma - \varrho 1)x^{m-r+1} - (\tau - \sigma 1)x^{m-r}$$

d. i.

$$x^{m+1} = (\alpha+1)x^m + (\beta-\alpha 1)x^{m-1} \ldots + (\varepsilon - \delta 1)x^{m-n+1} + (\zeta - \varepsilon 1)x^{m-n} \ldots + (\varrho - \pi 1)x^{m-r+2} + (\sigma - \varrho 1)x^{m-r+1} + (\tau - \sigma 1)x^{m-1}$$

Diese Gleichung soll $\mathfrak{C}$ heissen. Wenn nun die Summe der Potenzen u von den Wurzeln der Gleichung $\odot$, Ru genennet wird, so heist die Summe von eben den Potenzen der Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{C}$, $Ru + l^u$ z. E. Wenn $u = 2$ und also R2 die Summe von den Quadraten der Wurzeln der Gleichung des II. S. bedeutet, so muß zu dieser Summe noch 11 addirt werden, die Summe von den Quadraten der Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{C}$ zu haben, welche also $R2 + 11$ ist. Wenn nun Newtons Formel, die für jeden Werth von r, so nicht gröſſer ist, als m, in der Gleichung $\odot$, als richtig angenommen wird, für eben den Werth von r, für den sie in $\odot$ gilt, auch in $\mathfrak{C}$ gelten soll, so muß folgendes statt finden:

Rr =

Gleichung rückwärts, und nehme auſſer i
noch die Gleichungen ☿ und ♀ für wa
Man ſetze nähmlich in der Gleichung o
$(r-1)\varrho + l\varrho\,(1-r)$ ſtatt $(r-1)$
Werth davon, der einige Zeilen zuvor an
Gleichung ♀ gefunden worden, ſo verw
ſich $l\,(r-1)\varrho + l\varrho\,(1-r) = o$ in die
chung ♄. Zu derſelben addire man folgend

$$lr = \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} \ldots + \varepsilon l^{r-n} + \zeta l^{m-}$$
$$+ l^{r} \quad - \alpha l^{r-1} \quad - \delta l^{r-n+1} - \varepsilon$$
$$- l$$

nähmlich eine Gleichung, ſo aus den Glie
beſtehet, die ſich in der Gleichung 4 aufh
ſo iſt klar, daß 4 aus ♄ entſtehen wird. W
man nun zu 4 wiederum ☿ addirt, ſo erhält
♂ deren Richtigkeit zu beweiſen war. S
alſo gezeigt worden, daß, aus den vorausgeſ
Gleichungen ♀ und ☾, das iſt, aus der newt
ſchen Formel für den Grad m angenommen,
Wahrheit eben dieſer Formel für den Grad m
folge, ſo lange r in der Gleichung ☾ nicht
ſer iſt, als es in ☉ werden kann; denn der
weis ſetzt in beyden Gleichungen einerley Gr
von r zum voraus. Nun aber iſt der gr
Werth der r in ☉ haben kann, $r = m$,
alſo bloß noch übrig, darzuthun, daß die F
mel ♂ auch richtig ſey, wenn $r = m+$
Dieſes wird für ☾ eben ſo dargethan, wie
für ☉ im II. Satze geſchehen.

zusammen ausmachen, $1\varrho.(r-r)$, daß also folgendes herauskömmt, wo nur noch die mittelsten Glieder der Columnen übrig sind:

$$0 = 1(Rr-1-\alpha Rr-2\ldots-\delta R(r-n)-\varepsilon Rr-n-1\ldots-\pi R)+1\varrho.(1-r) \quad (\mathfrak{h})$$

Die Richtigkeit vorstehender Gleichung $\mathfrak{h}$ aber erhellt aus folgendem; Weil die Formel $\mathfrak{Y}$ für jeden Werth von r in $\odot$ angenommen wird, so muß sie auch richtig bleiben, wenn $r-1$ statt r gesetzt wird, und also nachstehende Gleichung φ gültig seyn.

$Rr-1 = \alpha Rr-2+\beta Rr-3\ldots+\delta R(r-n)+\varepsilon R(r-n-1)\ldots+\pi R+(r-1)\varrho$ nähmlich wie $r\sigma$ vorhin das letzte Glied der Gleichung $\mathfrak{Y}$ war, weil σ als Coefficient zu der Potenz $m-r$ von x gehörte, so schliesst hier $(r-1)\varrho$ die gegenwärtige Gleichung, weil ϱ als Coefficient zu der Potenz $m-r-1$ von x gehört, und φ aus $\mathfrak{Y}$ wird, indem man $r-1$ statt r setzt. Die Gleichung φ nun giebt $R(r-1)-\alpha R(r-2)-\beta R(r-3)\ldots-\delta R(r-n)-\varepsilon R(r-n-1)-\pi R = r-1.\varrho$ und folglich verwandelt sich die Gleichung φ in $0 = 1.(r-1)\varrho+1\varrho.(1-r)$, welches richtig ist.

Vorgehende Schlüsse zeigen, daß die Formeln $\mathfrak{Y}$, φ, und σ zusammengenommen, endlich die Gleichung $0 = 1\varrho.(r-1)+1\varrho.(1-r)$ geben. Den Beweis des Hauptsatzes aber einzusehn, gehe man von dieser letztgefundenen

In einem Briefe Heinrich Oldenburgs S
cretärs der Kön. engl. Soc. an Leibnizen v
30. März 1675; findet sich folgende Stelle

Si recte memini, quidam, Albertus Gerard
(dans son invention nouvelle) methodum ha
ex aequationum coefficientibus. et homogen
comparationis, summam dare, quadratorum, c
borum, et biquadratorum radicum incogni
rum, *cet.*

Hr. Ge. Wilh. Böhmer, wollte vor me
Jahren . . vor 1787; . . . ungedruckte Brie
von Leibnizen und Leibnizen betreffend, heraus
geben. Er bekam Abschriften aus Englan
von dem angeführten soll das Original im A
chive der K. Soc. seyn. Er wies mir diese A
schriften, um zu erfahren, ob welche von dies
Briefen schon gedruckt wären? Ich zeigte ihm
daß dieses von einigen statt fand, wenn ich mi
recht erinnere im: Commercium epistolicum...
Lond. 1712. Bey der Gelegenheit habe ich
mir diese Stelle ausgezeichnet. Daß der Brie
irgendwo gedruckt sey, ist mir nicht bekannt.

Gerardus, ist ohne Zweifel Albert Giran
den ich in meiner geometrischen Abhandlungen
2. Samml. 31. Abh. 422. u. f. S. erwähnt
Einer der grössten Mathematiker im Anfang
des vorigen Jahrhunderts, und seine Schriften,
die Uebersetzung von Stevins Werken ausgenom
men, die er nicht verfertigt, nur durchgesehn
und Anmerkungen dazu gemacht hat, sind so

ver

IV. Satz.

Die newtoniſche Formel des III. Satzes gilt für alle Gleichungen, r und m mögen ſo groß ſeyn, als ſie wollen.

Bew. Wenn $m = 3$, ſo gilt dieſe Formel für jeden Werth, den r in der cubiſchen Gleichung haben kann, nähmlich für $r = 3$, $r = 2r = r$. (I. Satz.). Sie gilt alſo auch, vermöge des III. Satzes für jeden Werth, den r in der biquadratiſchen Gleichung haben kann. Hieraus folgt, daß man nun ſetzen könne $m = 4$ und alſo $m + 1 = 3$, d. i. daß Newtons Regel, weil ſie vom 4. Grade gilt, auch vom 5. gelten müſſe. Wenn ſie aber vom 5. gilt, ſo gilt ſie auch, vermöge des III. Satzes, vom 6ten, und ſo geht es ohne Ende fort. Hat man alſo ihre Richtigkeit für die cubiſche Gleichung erwieſen, ſo gilt ſie vermöge des III. Satzes, für alle höhere, indem man immer von einer auf die nächſt höhere, von dieſer, auf die nächſtfolgenden u. ſ. f. ſchlieſſt. Für die quadratiſche Gleichung iſt die Regel auf eben die Art zu beweiſen, wie für die cubiſche, nur daß der Beweis noch kürzer fällt.

Vorhergehender Beweis findet ſich in der zu Leipzig anfangs unter Joh. Andr. Cramers, der als Kanzler der Univ. Kiel ſtarb, nachmahls unter Mylius Aufſicht herausgegebenen Philoſophiſchen Unterſuchungen und Nachrichten, 6 Stücke; das 1746. herausgekommen iſt.

In einem Briefe Heinrich Oldenburgs Secretärs der Kön. engl. Soc. an Leibnizen vom 30. März 1675; findet sich folgende Stelle:

Si recte memini, quidam, Albertus Gerardus, (dans son invention nouvelle) methodum habet ex aequationum coefficientibus et homogeneo comparationis, summam dare, quadratorum, cuborum, et biquadratorum radicum incognitarum, *cet.*

Hr. Ge. Wilh. Böhmer, wollte vor mehr Jahren . . vor 1787; . . . ungedruckte Briefe, von Leibnizen und Leibnizen betreffend, herausgeben. Er bekam Abschriften aus England, von dem angeführten soll das Original im Archive der K. Soc. seyn. Er wies mir diese Abschriften, um zu erfahren, ob welche von diesen Briefen schon gedruckt wären? Ich zeigte ihm, daß dieses von einigen statt fand, wenn ich mich recht erinnere im: Commercium epistolicum.... Lond. 1712. Bey der Gelegenheit habe ich mir diese Stelle ausgezeichnet. Daß der Brief irgendwo gedruckt sey, ist mir nicht bekannt.

Gerardus, ist ohne Zweifel Albert Girard den ich in meiner geometrischen Abhandlungen 2. Samml. 31. Abh. 422. u. f. S. erwähne. Einer der gröſsten Mathematiker im Anfange des vorigen Jahrhunderts, und seine Schriften, die Uebersetzung von Stevins Werken ausgenommen, die er nicht verfertigt, nur durchgesehn und Anmerkungen dazu gemacht hat, sind so

ver-

) . Weil $a - b = a.\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ ſey

$- = \sin\beta$ ſo iſt $a - b = a.\cos\beta^2$ und

$\cdot - b) = \log a + 2.\log\cos\beta$.

) Man ſieht leicht wie ſich eben das auf ſchiede von Potenzen erſtrecken läſſt.

VI) Regula nova inveniendi logarithmum nae vel differentiae duor. numeror. . . . . a liano Wolfio, findet ſich Act. Erud. Iun. . Es ſind da die Vorſchriften II . . IV; Worten ausgedruckt. Wolf erwähnt, Io. Muſchelius de Moſchau habe in Eph. Ac. . Dec. III. ann. IV. p. 102; eine ſchwerere queme Regel gegeben.

VII) Das Exempel (I) zeigt daß des ge ten Logarithmen niedrigſte Zifern unrichtig ben, wie allemahl geſchieht, wenn man aus len die nur der Wahrheit nah angegeben andre, nach einer theoretiſch vollkommen tigen Vorſchrift ſucht. Verlangte man alſo geſuchten Logarithmen auf ſieben Decimal len richtig, ſo müſſte man die trigonometri en aus Tafeln nehmen wo ſie auf mehr Stel angegeben ſind.

VIII) Wolf giebt kein Exempel als zu (III) den Logarithmen der Summe der Würfel n 3 und 7, (welche = 370 iſt) da braucht er gonometriſche Logarithmen auf zehn Decimal

$\log(a+b) = \log a + 2.\log \sec \alpha$
$= \log a - 2.\log \cos \alpha.$

Exempel. Man ſucht log 12347; wo a = 10000; b = 2347;

20 + log 2347	=	23,3705131
— log a	=	— 4
2. log tang α	=	19,3705131
log tang α	=	9,6852565
giebt α	=	25° 50′ 53″,
log cos α	=	9,9542200
verdoppelt	=	19,9084400
20 + log a	=	24
log (a + b)	=	4,0915600

In den Tafeln ſteht log 12347 = 4,0915614.

II) Die Gleichung zwiſchen den Logarithmen in (I) ſagt $(\cos \alpha)^2 = \frac{a}{a+b}$; daraus folgt $(\sin \alpha)^2 = \frac{b}{a+b}$ und nun

$\log(a+b) = \log b - 2.\log \sin \alpha.$

III) $a^m + b^n = a^m.\left(1 + \frac{b^n}{a^m}\right)$. Man ſetze $\sqrt{\frac{b^n}{a^m}} = \text{tang } \gamma$; alſo $a^m + b^n = a^m.\sec \gamma^2$ oder $\cos \gamma^2 = \frac{a^m}{a^m + b^n}$ daraus folgt $\sin \gamma^2 = \frac{b^n}{a^m + b^n}$ und $\log(a^m + b^n) = n.\log b - 2.\log \sin \gamma$.

IV)

IV) Weil $a - b = a.\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ ſey $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sin\beta$ ſo iſt $a - b = a.\cos\beta^2$ und $\log(a - b) = \log a + 2.\log\cos\beta$.

V) Man ſieht leicht wie ſich eben das auf Unterſchiede von Potenzen erſtrecken läſſt.

VI) Regula nova inveniendi logarithmum ſummae vel differentiae duor. numeror. . . . . a Chriſtiano Wolfio, findet ſich Act. Erud. Iun. 1715. Es ſind da die Vorſchriften II . . IV; mit Worten ausgedruckt. Wolf erwähnt, Ioſeph Muſchelius de Moſchau habe in Eph. Ac. Leop. Dec. III. ann. IV. p. 102; eine ſchwerere, unbequeme Regel gegeben.

VII) Das Exempel (I) zeigt daß des geſuchten Logarithmen niedrigſte Zifern unrichtig werden, wie allemahl geſchieht, wenn man aus Zahlen die nur der Wahrheit nah angegeben ſind andre, nach einer theoretiſch vollkommen richtigen Vorſchrift ſucht. Verlangte man alſo den geſuchten Logarithmen auf ſieben Decimalſtellen richtig, ſo müſſte man die trigonometriſchen aus Tafeln nehmen wo ſie auf mehr Stellen angegeben ſind.

VIII) Wolf giebt kein Exempel als zu (III) für den Logarithmen der Summe der Würfel von 3 und 7, (welche = 370 iſt) da braucht er trigonometriſche Logarithmen auf zehn Decimal-

nomischen Abhandlung beschreibe, 30 und XXV; auch fünfte Abh. 12. zeige wie dal Logarithmen grosser Zahlen berechnet werde

XIII) Ueberhaupt scheinen beyde Kunstg keinen grossen Nutzen zu haben, wenn sie dazu dienen sollten grosse Zahlen als Sum von kleinen anzusehn, deren Logarithmen u aus kleinern Tafeln nähme. Da wäre der meine Gebrauch der Proportionaltheile, beq mer, selbst richtiger. Für das Exempel (1 hätte man aus den kleinen Tafeln, die Logarit men von 49750 und 49760; und ihr Unt schied zu Proportionaltheilen gebraucht, g log 49758 genau wie ich vorhin aus gröss Tafeln angeführt habe.

XIV) Wolf hat aber nicht allein an dies Gebrauch seines Verfahrens gedacht, weil e auch von Unterschieden redet, und es giebt im mer Fälle wo man dergleichen Logarithmen su chen kann. Allemahl ist es selbst deßwegen g dergleichen Kunstgriffe zu kennen, damit ma sich von ihnen keine grössere Vorstellung mach als sie verdienen.

XV) Da die natürlichen Sinus und Tan genten für den Halbmesser = 10000000 gross Zahlen sind, so konnte man darauf fallen, ihn Logarithmen zu brauchen, um daraus, durch Proportionaltheile Logarithmen grosser Zahlen zu finden. Schon Neper, schlug vor seine tri gonometrischen Logarithmen auch so für Logarith

men

Verfahren gekommen, und habe es, selbst bey Quadraten und Würfeln der Sinusse brauchbar gefunden.

XI. Exempel. Aus den kleinen Tafeln wo die Logarithmen nur bis 10000 gehn, suche man den von 49758; wo a = 40000; b = 9758.

log b = 3,9893608
log a = 4,6020600

$\log \frac{b}{a}$ = 0,3873008 − 1

gehört der Zahl = 0,2439; also x = 1,2439. Durch Proportionaltheile findet sich aus ebenden kleinen Tafeln

log x = 0,0947855
log a = 4,6020600

log (a + b) = 4,6968455

In grössern Tafeln steht dieser Logarithme genau bey 49756; aber

log 49758 = 4,6968629.

XII) Wolf hat also seinen ersten Gedanken zu gering geschätzt; die Ausführung desselben ist so gar leichter, als das Verfahren, das er statt desselben erwählte; die niedrigsten Zifern unrichtig anzugeben müssen beyde Methoden gemein haben, weil eine wie die andre, aus Logarithmen rechnet, deren niedrigste Zifern selbst nicht ganz zuverlässig sind.

Schärfer wird die Rechnung, wenn man für a und b Logarithmen auf mehr Decimalstellen hat, dergleichen ich in meiner vierten astro-

nomischen Abhandlung beschreibe, 30 und 31; XXV; auch fünfte Abh. 12. zeige wie dadurch Logarithmen grosser Zahlen berechnet werden.

XIII) Ueberhaupt scheinen beyde Kunstgriffe keinen grossen Nutzen zu haben, wenn sie nur dazu dienen sollten grosse Zahlen als Summen von kleinen anzusehn, deren Logarithmen man aus kleinern Tafeln nähme. Da wäre der gemeine Gebrauch der Proportionaltheile, bequemer, selbst richtiger. Für das Exempel (XI) hätte man aus den kleinen Tafeln, die Logarithmen von 49750 und 49760; und ihr Unterschied zu Proportionaltheilen gebraucht, gäbe log 49758 genau wie ich vorhin aus grössern Tafeln angeführt habe.

XIV) Wolf hat aber nicht allein an diesen Gebrauch seines Verfahrens gedacht, weil er auch von Unterschieden redet, und es giebt immer Fälle wo man dergleichen Logarithmen suchen kann. Allemahl ist es selbst deßwegen gut dergleichen Kunstgriffe zu kennen, damit man sich von ihnen keine grössere Vorstellung macht als sie verdienen.

XV) Da die natürlichen Sinus und Tangenten für den Halbmesser = 10000000 grosse Zahlen sind, so konnte man darauf fallen, ihre Logarithmen zu brauchen, um daraus, durch Proportionaltheile Logarithmen grosser Zahlen zu finden. Schon Neper, schlug vor seine trigonometrischen Logarithmen auch so für Logarithmen

men gemeiner Zahlen zur ebenen Trigonometrie zu brauchen. (Meine vierte aſtronomiſche Abhandlung 59.) Auch Kepler hatte ſeine Chilias logarithmorum ſo eingerichtet, daß die Logarithmen zugleich für trigonometriſche Linien und für gemeine Zahlen dienten (meiner geometriſchen Abh. I. Samml. 60. Abh. 42.) Später, gab Krüger, neperiſche Logarithmen nach der Reihe gemeiner Zahlen, (eben dieſe Abh. 74.) Noch der Hr. v. Oppel ſchlug vor die trigonometriſchen Logarithmen für groſſe gemeine Zahlen zu brauchen, (meine Anmerkungen über die Markſcheidekunſt, 9. Anm. 20.) Ich habe da den Werth dieſes Vorſchlages umſtändlich geprüft.

XVI) Das Allgemeine von der Methode (IX) beruht darauf, daß eines Products Logarithme die Summe der Logarithmen der Factoren iſt, und ſo werden in der Analyſis des Unendlichen, die Reihen dadurch ſich Sinus, und Coſinus geben, in Factoren zerfällt, deren Logarithmen addirt den Logarithmen des Werths der Reihe geben. (An. Un. 338; 341.) So findet man auch ganzer Zahlen natürliche Logarithmen durch weit berechnete natürliche Logarithmen ihrer Factoren. (An. Un. 226.)

XVII) Es erhellt, daß man die Zahlen, a, b, nicht einmahl ſelbſt zu wiſſen nöthig hätte, nur ihre Logarithmen.

XVIII)

XV[illegible], Eine andere Auflösung [illegible] ni[illegible] se folgende:

Man ſetze $\frac{i}{2} = \text{tang } \zeta$. alſo $a - i =$

$b \cdot (1 + \cos 2\zeta) = 2 \frac{(\sin \zeta + \cos \zeta)}{\sin \zeta}$. [illegible]

iſt $\sin (45° + \zeta) = (\sin \zeta + \cos \zeta) \sin 45°$

Alſo $a + b = \frac{2 \sin (45° + \zeta)}{\sin \zeta \sin 45°}$.

Es hat man die Summe durch einen Quotien ten zweyer Producte, für die man den Logarithmen jedes Factors finden kann.

XIX) Eben ſo die Summe dreyer Glie[illegible] auszudrücken, ſey

vorhin	a	b	ζ
jetzo	a + b	c	η

Man mache alſo $\text{tang } \eta = \frac{c}{a+b} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \zeta \sin 45°}{\sin (45° + \zeta)}$, ſo iſt $a + b + c = c \cdot \frac{\sin (\eta + 45°)}{\sin \eta \sin 45°}$.

XX) So könnte man immer weiter fort gehn. Dieſes Verfahren lehrt du Séjour des mouv. app. des corps céleſtes T. I. §. 133.

XXI) Logarithmen von Summen und Differenzen zu finden, lehrt auch de Lambre, Neue Abh. der Königl. Schwed. Akad. der Wiſſenſchaften

schaften 1788. 2 Quartal, I. Abhandl. 77. S. der Ueberſ.

XXIII) Alle dieſe Kunſtgriffe brauchen Winkel, die man in den Tafeln ſelten ganz genau finden wird. Und ſo urtheile ich von ihnen wie in (XIII).

753. Gebrauch der trigonometriſchen Tafeln und Logarithmen, Quadratwurzeln anzugeben.

I) Weil $\sqrt{(b^2 - a^2)} = b.\sqrt{\left(1 - \frac{a}{b}\right)}$

ſo ſetze man $\frac{a}{b} = \sin \alpha$; da iſt die Quadratwurzel $= b.\cos \alpha$.

II) Weil $\sqrt{(b^2 + a^2)} = b.\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}$

ſetze man $\frac{a}{b} = \text{tang } \beta$; ſo iſt die Quadratwurzel $= b.\sec \beta$.

III) Beydes lehrt Hr. Hofr. Mayer, Unterricht zur praktiſchen Geometrie I. Th. in den gleich zu Anfange befindlichen trigonometriſchen Sätzen XVI.

IV) Natürlich muß man meiſt in der Anwendung Proportionaltheile brauchen. Allemahl erhält man ſo eine nützliche Näherung.

V) In (I) würde ich doch lieber ſo rechnen $\frac{1}{2}.(\log(b + a) + \log(b - a))$. Das Verfahren (I) ſetzt zum voraus, man habe die Loga-

5. Zuſ.) und der Nenner $= \frac{\text{tang } \varphi}{\text{ſin } \varphi}$ (

4. Erkl. 3. Zuſ.) $= \frac{\text{tang } \varphi}{2. \text{ſin } \frac{1}{2}\varphi. \text{coſ } \frac{1}{2}\varphi}$ (

19. S. 5. Zuſ.). Alſo (Trig. 5. Erkl.) ſe

$+ 1 = \text{cot } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi.$ Eben ſo finde

$\text{ſec } \varphi - 1 = \text{tang } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi.$

IX) So ſind in (VIII) die beyden Werthe; $z = \frac{1}{2}. g. \text{ cot } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi$

oder $z = -\frac{1}{2}. g. \text{ tang } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi$

Der erſte bejaht, der zweyte verneint.

Ein Beyſpiel hievon iſt 463; V.

X) Der zweyte Fall (V) giebt

$z = \frac{1}{2}. g. (\mp \text{ ſec } \varphi - 1)$

Daraus folgen, wie in (VIII) die beyden Wer

$-\frac{1}{2}. g. \text{ cot } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi$

$+\frac{1}{2}. g. \text{ tang } \frac{1}{2}\varphi. \text{ tang } \varphi.$

XI) Für die letzten beyden Fälle ſey $\frac{2. \sqrt{}}{g}$

$= \text{ſin } \psi.$

So iſt $1 + \text{coſ } \psi = 2. (\text{coſ } \frac{1}{2}\psi)^2$

$1 - \text{coſ } \psi = 2. (\text{ſin } \frac{1}{2}\psi)^2$ (Tri

19. S. 5; 7; Zuſ.) Alſo die beyden Werth

XII) Im dritten Falle (V)

$g. (\text{coſ } \frac{1}{2}\psi)^2$ und

$g. (\text{ſin } \frac{1}{2}\psi)^2.$

XIII) Im vierten (VI)

$-g. (\text{coſ } \frac{1}{2}\psi)^2$ und

$-g. (\text{ſin } \frac{1}{2}\psi)^2.$

XIV

Wo p, q, bejahte oder verneinte Werthe haben können.

II) Zur folgenden Rechnung wird es bequemer seyn, den Buchstaben, welche die Coefficienten andeuten, allemahl bejahte Werthe zu geben. Man setze also g, h, sollen allemahl bejahte Grössen bedeuten, so giebt es vier Fälle

Fälle	I.	II.	III.	IV.
p =	+ g	− g	+ g	− g
q =	+ h	+ h	− h	− h

Und die Formel (I) giebt folgende vier.

III) Erst. Fall $z = \frac{1}{2}.g.\left(1 \pm \sqrt{(1 + \frac{4.h}{g^2})}\right)$.

IV) Zweyter; $z = \frac{1}{2}.g.\left(-1 \mp \sqrt{(1 + \frac{4.h}{g^2})}\right)$.

V) Dritter; $z = \frac{1}{2}.g.\left(1 \pm \sqrt{(1 - \frac{4.h}{g^2})}\right)$.

VI) Vierter; $z = \frac{1}{2}.g.\left(-1 \mp \sqrt{(1 - \frac{4.h}{g^2})}\right)$.

VII) Für die ersten beyden Fälle setze man $\frac{2.\sqrt{h}}{g} = \text{tang } \varphi$.

Man nimmt die Wurzel bejaht, also auch die Tangente.

VIII) So giebt der erste Fall (III) $z = \frac{1}{2}.g.(1 \pm \text{sec } \varphi)$.

Es ist aber $\text{sec } \varphi + 1 = \frac{1 + \text{cos } \varphi}{\text{cos } \varphi}$

wo der Zähler $= 2\,(\text{cos } \frac{1}{2}\varphi)^2$ (Trig. 19. S. 5. Zus.)

Ist $h = \frac{1}{4}g^2$; so ist $\psi = 90$ Grad die beyden gleichen Wurzeln sind im dritten $+ \frac{1}{2}g$; im vierten $- \frac{1}{2}g$.

Ist h grösser als $\frac{1}{2}g$ so giebt es keine nus und beyde Werthe sind unmöglich. allemahl wenn $g = 0$.

Sind die Werthe möglich, so sind beyd dritten Falle bejaht und im vierten verneint.

XVI) In den ersten beyden Fällen (VI $\frac{1}{2}g \cdot \text{tang } \varphi = \sqrt{h}$.

XVII) Also ist (IX) für den ersten Fal
$$z = + \sqrt{h} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$
oder $$= - \sqrt{h} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Und in (X) für den zweyten Fall
$$z = - \sqrt{h} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$
oder $$= + \sqrt{h} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

XVIII) Ist $g = 0$; so kömmt $\varphi =$ Grad und in (XVII) für die beyden ersten F $z = \pm \sqrt{h}$; Beyde Fälle gehn nähmlich in einen zusammen, eine reine quadratische G chung, wo der unbekannten Grösse Quadrat ner bekannten bejahten Grösse gleich ist. S hat also zweene entgegengesetzte sonst gle Werthe.

XIX) Exempel für den zweyten Fall $z^2 =$ $- 347 \cdot z + 22110$; $g = 347$; $h = 22110$ $\frac{1}{2}g = 173,5$.

XIV) Diese vier Formeln (IX; X; XII; XIII) sind in der Theorie völlig wahr. In der Ausübung geben sie Näherungen, da man die Winkel, ihre Tangenten und Sinus, nur so genau hat, als die Tafeln sie angeben. Braucht man Proportionaltheile, und das ist zumahl bey Tafeln wo die Winkel von zehn zu zehn Secunden gehn, nicht mühsam, so findet man die Werthe durch die Logarithmen so nah als zur Ausübung zureicht; und wenn man eine sehr grosse Schärfe verlangte, hätte man auf diese Art die erste Näherung schon ziemlich weit getrieben.

Brauchte man Gellibrands oder Vlacqu's grössere Tafeln, so hätte man freylich der trigonometrischen Linien Logarithmen auf mehr Decimalstellen, aber das gäbe doch die Näherung vermittelst der Logarithmen nicht schärfer, wenn man nicht auch den Logarithmen für g in eben soviel Decimalstellen hätte.

XV) Was das Bejahte, Verneinte, Gleiche, Unmögliche bey den Würzeln betrifft, ist schon aus der allgemeinen Gleichung (I) bekannt, daß man es aus diesen Formeln nicht herzuleiten braucht, wie sich sonst auch leicht thun liesse.

So erhellt aus IX; X; daß die beyden ersten Fälle keine unmögliche Wurzeln haben, jeder aber, eine bejahte und eine verneinte.

In den beyden letzten Fällen (XII; XIII) sind die Wurzeln möglich wenn h nicht gröſſer ist als $\frac{1}{4}g^2$, denn da giebt es allemahl einen Sinus (XI).

Ist $h = \frac{1}{4}g^2$; so ist $\psi = 90$ Grad und die beyden gleichen Wurzeln sind im dritten Falle $+ \frac{1}{2}g$; im vierten $- \frac{1}{2}g$.

Ist h gröſſer als $\frac{1}{2}g$ so giebt es keinen Winkel und beyde Werthe sind unmöglich. Also allemahl wenn $g = o$.

Sind die Werthe möglich, so sind beyde im dritten Falle bejaht und im vierten verneint.

XVI) In den ersten beyden Fällen (VII) ist $\frac{1}{2}g. \text{tang } \varphi = \sqrt{h}$.

XVII) Also ist (IX) für den ersten Fall

$$z = + \sqrt{h}. \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

oder $$= - \sqrt{h}. \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Und in (X) für den zweyten Fall

$$z = - \sqrt{h}. \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

oder $$= + \sqrt{h}. \text{tang } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

XVIII) Ist $g = o$; so kömmt $\varphi = 90$ Grad und in (XVII) für die beyden ersten Fälle $z = \pm \sqrt{h}$; Beyde Fälle gehn nähmlich da in einen zusammen, eine reine quadratische Gleichung, wo der unbekannten Gröſſe Quadrat einer bekannten bejahten Gröſſe gleich ist. Jene hat also zweene entgegengesetzte sonst gleiche Werthe.

XIX) Exempel für den zweyten Fall $z^2 = - 347. z + 22110$; $g = 347$; $h = 22110$; $\frac{1}{2}g = 173,5$.

log

$\log h = 4,3445887$
$10 + \text{halb} = 12,1722943$
$\log \frac{1}{2}g = 2,2392995$

$\log \text{tab tang } \varphi = 9,9329948$
Der Winkel $= 40^\circ\ 35'\ 52''$
seine Hälfte $= 20\ 17\ 56.$

Es ist $\frac{1}{2}\log h + \log \text{tab cot } \frac{1}{2}\varphi - 10$
$= \frac{1}{2}\log h + 20 - \log \text{tab tang } \frac{1}{2}\varphi - 10$

$\frac{1}{2}\log h = 2,1722943$
$+ \log \text{tab tang } \frac{1}{2}\varphi - 10 = 0,5680714 - 1$

$\log$ des bejahten $z = 1,7403657$

$\frac{1}{2}\log h = 2,1722943$
$-\log \text{tab tang } \frac{1}{2}\varphi + 10 = -9,5680714 + 10$

$\log$ des verneinten $z = 2,6042229$
der bejahte Werth $= +\ 55,000$
— verneinte — $= -401,99.$

Man muthmaßt also leicht daß der bejahte Werth genau $= 55$ seyn möge.

Davon versichert man sich, wenn man $z^2 + 347.z - 22110$ mit $z - 55$ dividirt. Die Division geht auf und der Quotient ist $= z + 402$ also die verneinte Wurzel $= -402$, welches auch der Logarithme andeutet.

XX) James Dodson, mathematical repository. Lond. 1748; enthält eine Menge analytischer Aufgaben, zur Uebung für Lernende. Da steht die Gleichung (XIX) bey des ersten Theils 174. Frage; 115. Seite.

Mit der Nachricht: "Man findet die Wurzel dieſer Gleichung vermittelſt der Tafeln der Logarithmen für gemeine Zahlen und für Tangenten. Die Methode giebt Edmund Halley, in ſ. geometrical lectures, die als ein Anhang der neuſten Ausgabe von Kerſeys Algebra beygefügt ſind".

Die Rechnung iſt nur am Exempel dargeſtellt, ohne eine allgemeine Formel, aber nach der Formel geführt, die ich gebraucht habe; Es wird nur die bejahte Wurzel angegeben. Kerſeys Algebra, und Halleys geometriſche Vorleſungen ſind mir nicht bekannt. Ich finde auch von Dodſon Halleys Verfahren bey einigen folgenden Aufgaben gebraucht, aber nirgends die Sinus für die beyden letzten Fälle angewandt (XI).

XXI) Es iſt wohl nicht ganz unnütz die Frage beyzubringen, welche auf die Gleichung (XIX) führt.

Zweene Kaufleute haben zuſammen 165 Pf. St. Capital. Des erſten Capital war 12 Monate im Handel, des zweyten ſeines 8 Monate. Als ſie ſich theilen, bekömmt für Capital und Gewinnſt zuſammen der erſte 67 Pf. der zweyte 126 Pf.

Was war jedes Capital und Gewinnſt.

Des erſten Capital ſey $= x$, ſo iſt des zweyten ſeines $= 165 - x$.

Die

Die Gewinnste stehn in einer Verhältniß, welche aus den Verhältnissen der Capitale und der Zeiten zusammengesetzt ist. Also

12. x : 8 (165 — x) = Gew. d. I. Gew. d. II.

Die Verhältniß ist = 3. x : 2. (165 — x). Weil beyde Capitale und der ganze Gewinnst zusammen = 193; so ist der ganze Gewinnst = 193 — 165 = 28.

Der Gewinnst des I; = 67 — x, des II; = 28 — (67 — x) = x — 39. Also

3. x : 2. (165 — x) = 67 — x : x — 39.

Woraus die Gleichung (XIX) folgt nur z statt x geschrieben.

Also den bejahten Werth gebraucht

	Capital	Gewinnst	Cap. + Gew.
des I.	= 55	12	67
II.	= 110	16	126

Begreiflich kann des ersten Capital nicht verneint seyn. So giebt die verneinte Wurzel der Gleichung keine Antwort auf die Frage. S. unten 757; V.

Exempel für den dritten Fall (XII).

XXII) $z^2 = 19.z - 84$

$g = 19$; $h = 84$

$10 + \frac{1}{2}\log 84 = 10,9621396$

$-\log \frac{1}{2}g = -\ 0,9777236$

$\log \sin \psi = 9,9844160$

Der Winkel = 74° 44′ 33″

Seine Hälfte = 37 22 16,5

log cos $\frac{1}{2}\psi$ = 0,9002137 — 1
verdoppelt = 0,8004274 — 1
log g = 1,2787536

log des ersten Werths = 1,0791810

log sin $\frac{1}{2}\psi$ = 0,7831722 — 1
verdoppelt = 0,5663444
1,2787536

log des zw. Werthes = 0,8450980

Der erste Werth käme = 12,000 — und der zweyte = 7,0000 —; beyde bejaht. Auch sind die völlig richtigen Wurzeln; + 12 u. + 7.

XXIII) Wolf Act. Er. Iul. 1715; p. 260. erwähnt kürzlich: Seine zweyte Regel Logarithmen von Summen und Unterschieden zu finden, die er der ersten vorzog (hie 752; I) diene auch zu Auflösung quadratischer Gleichungen. Er entwickelt aber solches gar nicht. Bey diesen Auflösungen kommen Quadratwurzeln vor; Und daher ist Anwendung der trigonometrischen Linien bey ihnen natürlich, wenn bey Summen und Unterschieden der Zahlen solche Linien blos durch eine Künsteley, angebracht werden. Ich glaube hie die Ausübung so bequem dargestellt zu haben als möglich ist.

XXIV) Dionys du Sejour, Traité analytique des mouvemens apparens des corps celestes, T. I. (Par. 1786) §. 30; lehrt ebenfalls quadratische Gleichungen durch die trigonometrischen Tafeln auflösen. Man wird mein Verfahren beque-

bequemer finden als das ſelnige, beyde beruhen auf einerley Gründe.

755. Summe der Würfel einer gegebenen Menge von 1 nach einander folgenden Zahlen.

Alſo $1 + 8 + 27 + 64 \ldots + m^3 = Q$.

I) In meiner Geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 6. habe ich gewieſen, wie die Summe der Quadrate gefunden wird. Wer ſelbigen Aufſatz nachſieht, wird leicht auf den Ausdruck fallen, den man für die Summe der Würfel annehmen muß. Unabhängig aber von dieſem Aufſatze, ſieht man hie in (45) daß der Unterſchied von ein paar nächſten Würfeln durch Glieder gegeben wird, deren höchſtens ein Quadrat iſt. Und ſo wird die Rechnung zeigen, daß der Unterſchied von ein paar nächſten vierten Potenzen, durch Glieder gegeben wird, deren höchſtes ein Würfel iſt. So iſt wohl natürlich, für die Summe von Würfeln, eine Reihe anzunehmen, deren höchſtes Glied eine vierte Potenz iſt.

II) Man ſetze alſo $Q = A.m^4 + B.m^3 + C.m^2 + D.m$. Die groſſen Buchſtaben rechter Hand ſollen unveränderliche Zahlen bedeuten, die einerley bleiben, was auch der gröſſte Würfel in Q iſt. Der Ausdruck enthält kein Glied ohne m; weil für $m = 0$ auch $Q = 0$.

III) Folglich iſt $Q + (m+1)^3 = A.(m+1)^4 + B.(m+1)^3 + C.(m+1)^2 + D.(m+1)$.

IV) Man ziehe II. von III. ab ſo kömmt:

einer unbestimmten Menge, von 1 nach einander folgenden ganzen Zahlen zu finden: Nähmlich

$$1^n + 2^n + 3^n \ldots\ldots + x^n = Q$$

wo x allemahl eine ganze Zahl bedeutet.

I) Sie sey $Q = a.x^{n+1} + b.x^n + c.x^{n-1} + d.x^{n-2} + e.x^{n-3} + f.x^{n-4} + g.x^{n-5} \ldots\ldots$

III) Man setze rechter Hand überall $n+1$ statt x; so kömmt $Q + (x+1)^n =$ der Reihe rechter Hand, die man solchergestalt erhält.

IV) Auf beyden Seiten ziehe man Q ab, so bleibt linker Hand $(x+1)^n$, und rechter Hand, bleiben von jeder Potenz der Größe $x+1$ mit ihrem Buchstaben a; b ... multiplicirt, die folgenden Glieder (121).

V) In der Gleichung (IV) ziehe man auf beyden Seiten $(x+1)^n$ ab, so bleibt linker Hand 0, rechter Hand kömmt eine Reihe Potenzen von x; deren Exponenten von n an, immer um 1 abnehmen.

VI) Nähmlich jedes Glied dieser Reihe, ist ein Product aus Größen, die kein x enthalten, in eine gewisse Potenz von x.

VII) Was in eine und dieselbe Potenz multiplicirt wird, besteht aus dem gehörigen Theile dessen, was in (IV) rechter Hand stehen blieb, und davon abgezogen den Binomialcoefficienten der Potenz von $x+1$; welcher sich bey der Potenz von x befindet, die in diesem Gliede steht.

VIII)

IX) $\frac{Q}{\frac{1}{4}m^4} = 1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}$;

Der Quotient linker Hand, kömmt der Einheit so nah als man will, wenn man m so groß nehmen darf als man will. Die Summe der Würfel, kömmt also dem vierten Theile der vierten Potenz der Menge ihrer Wurzeln, so nah als man will, wenn man diese Menge so groß nehmen darf als man will.

So ist im Exempel;

$\frac{1}{4}.1000^4 = 250000000000.$

Dieser Satz sagt von der Summe der Würfel so etwas, wie ein ähnlicher von der Summe der Quadrate; angef. Geom. Abh. XXI. u. f.

X) Man sieht leicht, daß sich dieses Verfahren auch bey höhern Potenzen anbringen liesse; die Summe aller vierten Potenzen z. E. würde aus der fünften, vierten, dritten, zweyten, ersten, bestehn, jede mit einem Coefficienten, u. s. w.

XI) Euler, Institut. Calculi differentialis cap. II. §. 62. giebt eine allgemeine Formel für solche Summen, und bestimmte für die ersten 16 Potenzen. Das Wesentliche beruht auf Formeln der Differenzen und Summen wie ich hie 724. u. f. gegeben habe. Hie will ich zeigen, wie man die Methode, die bey den Würfeln ist gebraucht worden, allgemein machen kann.

756. Gang der Rechnung, die Summe der Potenzen einerley, unbestimmten Exponentens,

$$n.(n-1).(n-2).\left(\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{12}.\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}\right)+$$

d. (n − 2) und das giebt d = o. n. (n − 1).

X) Ueberlegt man, wie jeder folgende Binomialcoefficient im Divisor und im Dividendus, einen Factor mehr hat, so findet man was in die Potenz n − 4 von x multiplicirt wird =

$$n..(n-3).\left(\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{12}.\frac{1}{1.2.3}+\frac{o}{1.2}-\frac{1}{1.2.3.4}\right)$$

+ e. (n − 3). Ich schreibe $\frac{o}{1.2}$ um zu erinnern, daß ein Binomialcoefficient mit d sollte multiplicirt werden, welches Product wegfällt, da d = o

giebt $e = -\frac{n.(n-1)..(n-2)}{30.\ 2.\ 3.\ 4}$.

XI) Und nun, alle schon gefundene Werthe gebraucht, kömmt, was in die Potenz n − 5 von x multiplicirt wird

$$n...(n-4).\left(\frac{1}{2.3.4.5.6}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{12}.\frac{1}{2.3.4}+o-\frac{1}{720}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3.4.5}\right)$$

+ f. (n − 4)

giebt f = o. n. (n − 1). (n − 2). (n − 3).

XII)

XII) Was in die Potenz n — 6 multiplicirt wird $n \ldots (n-5).\left(\frac{1}{2\ldots7} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2\ldots6} + \frac{1}{12}.\frac{1}{2\ldots5} + \frac{0}{2.3.4} - \frac{1}{720}.\frac{1}{2.3} + \frac{0}{1.2} - \frac{1}{2\ldots6}\right) + g.(n-5)$

giebt $g = + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}$.

XIII) So ist das Gesetz, nach dem die Rechnung fortgeht, offenbahr, freylich wird sie immer mühsamer, je weiter man sie treibt.

XIV) Ein Glied in der Reihe Q, sey $= k.x^{n-\varkappa}$. So kömmt k in der Reihe (V.) zuerst unter dem vor, was in die Potenz, n + 1 — k multiplicirt wird.

Dieses besteht aus n . . . . . (n — ϰ) multiplicirt in das Aggregat von den gehörigen Binomialcoefficienten jeden mit dem Werthe des zu ihm gehörigen Buchstabens a, b . . . . . und dazu kömmt noch k. n . . . . . (n — ϰ).

XV) Dieß zusammen wird = o gesetzt. Alles mit n — ϰ dividirt, und so giebt sich k durch ein Product aus n . . . . (n + 1 — ϰ) in das genannte Aggregat.

XVI) Setzt man ϰ = n so ist das in (XIV) angegebene, allemahl = o; man mag für k setzen was man will.

XVII)

XVII) Da wird also k durch die **Reihe (V)**, nicht bestimmt, aber durch die **Beschaffenheit der Frage** zu deren Beantwortung diese Reihe dient.

XVIII) Diese Reihe, soll nähmlich die Buchstaben der Reihe (I) angeben, die Reihe (I) ist gewiß $= 0$ wenn $x = 0$, und kann also kein Glied enthalten, das nicht $= 0$ wäre, wenn $x = 0$ ist. Folglich ist in ihr der Buchstabe $= 0$, der in x^{n-n} multiplicirt wäre.

XIX) Also, von allen den möglichen Werthen, welche k, in (XVI) haben darf, muß man den $= 0$ nehmen den (XVIII) erfodert.

XX) Wenn eine Rechnung eine Gröſſe unbestimmt läſſt, so befiehlt die Rechnung nicht, daß diese Gröſſe immer unbestimmt bleibe, sondern sie gestattet die Gröſſe nach den Umständen zu bestimmen. So verhält es sich auch bey den unbestimmten Aufgaben (179. u. f.).

XXI) Setzt man in (XV) x gröſſer als n, so würde k durch ein Product gegeben, darin 0 als Factor vorkäme, und wäre folglich auch $= 0$. Daß also in der Reihe (I) keine Potenzen von x mit verneinten Exponenten vorkommen, zeigt die Reihe (V).

XXII) Ich schreibe die Summen der Potenzen her, so weit die von mir berechneten Buchstaben reichen, Der Buchstaben Werthe stehn in VIII; IX; X; XI; XII.

XXIII)

XXIII)

n	Q
1	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
2	$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$
3	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$ *
4	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ * $- \frac{1}{30}x$
5	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4$ * $- \frac{1}{12}x^2$ *
6	$\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5$ * $- \frac{1}{6}x^3$ * $+ \frac{1}{42}x$

Ich setze Sterne für die Glieder, deren zugehörige Buchstaben $= 0$ sind, damit man den Buchstaben, der jedem Gliede gehört, leichter findet.

XXIV) Für $n = 5$, käme aus (XII) der Buchstabe für x^0 oder

$$g = \frac{5.4.3.2.1}{6.7.8.9.10} = \frac{1}{252}.$$

Aber dieser Buchstabe muß $= 0$ seyn.

Die Sache wird aus (XIX) erklärt.

XXV) In XII. käme hie

$$5.4.3.2.1.0.\left(\frac{1}{2..7} \text{ bis} - \frac{1}{2...6}\right).$$

$+ g.0 = 0$. Was linker Hand steht ist allemahl $= 0$, folglich bleibt g unbestimmt.

XXVI) Man könnte auf beyden Seiten mit 0 dividiren, so käme linker Hand etwas, das für sich nicht $= 0$ ist, und $= 0$ gesetzt, für g den Werth (XXIV) gäbe.

Aber wenn man auf beyden Seiten mit 0 dividirt, kömmt rechter Hand g und dieses für 0 an-

σ anzunehmen ist man nicht berechtigt, (Trig. 20. S. 3. Zus. X. auch Fortsetz. der Rechenk. XI. Cap. 2. Aufg. 180. §.)

XXVII) Es ist also wohl anmerkenswerth, daß aus einer allgemeinen Formel, eine Rechnung in bestimmten Zahlen nicht richtig geführt wird, wenn die bestimmten Zahlen so beschaffen sind, daß bey ihnen das nicht gilt, was bey der allgemeinen Formel vorausgesetzt wird.

So gilt die Voraussetzung, aus welcher im Allgemeinen g bestimmt wird, nicht, wenn $n = 5$.

XXVIII) Ich finde nicht, daß Euler a. a. O. diese Schwierigkeit angezeigt und gehoben hätte. In seinem 63. §. zeigt er, wie aus der Summe von Potenzen eines gewissen Exponenten die Summe eben so vieler Potenzen vom nächst höhern hergeleitet wird. Diese letzte Summe kömmt richtig, wenn der niedrigste beyder Exponenten gerade ist, wenn er aber ungerade ist, fehlt noch ihr letztes Glied; Euler zeigt, wie man dieses findet. Das ist offenbahr, eine ganz andre Frage, als die, von welcher ich im Vorhergehenden geredet habe.

757. Zusammensetzung von Würfeln aus ungeraden Zahlen.

I) Eine Bemerkung, die man bey Summen ungerader Zahlen machen kann, ist:
$3 + 5 = 8$; $7 + 9 + 11 = 27$; $13 + 15 + 17 + 19 = 64$; $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$.

Wenn

Wenn man also 1 als die erste ungerade Zahl ansieht, deren Würfel auch = 1; so ist die Summe der zweyten und dritten ungeraden, der Würfel der 2; der vierten, fünften, sechsten ungeraden Zahlen Summe, der Würfel der 3; und so giebt die Erfahrung weiter fortgeführt, ein Gesetz, das sich so ausdrücken läßt:

Jeder ganzen Zahl Würfel, ist die Summe, so vieler nach einander folgenden ungeraden Zahlen, als die Zahl Einheiten hat.

Welche unter diesen ungeraden Zahlen die kleinste ist, läßt sich nicht so leicht übersehn und mit Worten ausdrücken. Ich brauche also die Buchstabenrechnung.

II) Von p nach einander folgenden ungeraden Zahlen sey die kleinste = 2. m − 1, so sind die Zahlen;

2. m−1; 2. m + 1; 2. m + 3 ..... 2. m−1+2(p−1)

Die grösste ist = 2 (m + p) − 3. Die Summe der grössten und kleinsten = 4. m + 2. p − 4; Also die Summe der Reihe

(2 m + p − 2). p.

III) Setzt man diese Summe = p^3; so kömmt 2. m + p − 2 = p^2. Daher 2. m = p^2 − p + 2.

So wenn p = 6; ist 2m = 32 und 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216.

Es sey p = 1000; so ist 2m = 1000002 − 1000 = 999002; also in der Reihe der

tausend ungeraden Zahlen die kleinste = 99900 die gröſste = 1009999, und der Reihe Summe = 2000000. $\frac{1000}{2}$.

IV) In der Gleichung (III) könnte man als gegeben annehmen, so käme $p = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4} + 2.m - 2)}$.

Hiebey müſste m so genommen werden, daſs die Quadratwurzel rational ist, selbst eine solche Rationalzahl, die zu $\frac{1}{2}$ addirt, eine ganze Zahl giebt.

Dann, bekömmt p zweene Werthe, davon einer verneint ist.

Der verneinte gehört gar nicht zur gegenwärtigen Frage, denn die Wurzel des Würfels wird ohnstreitig für bejaht genommen.

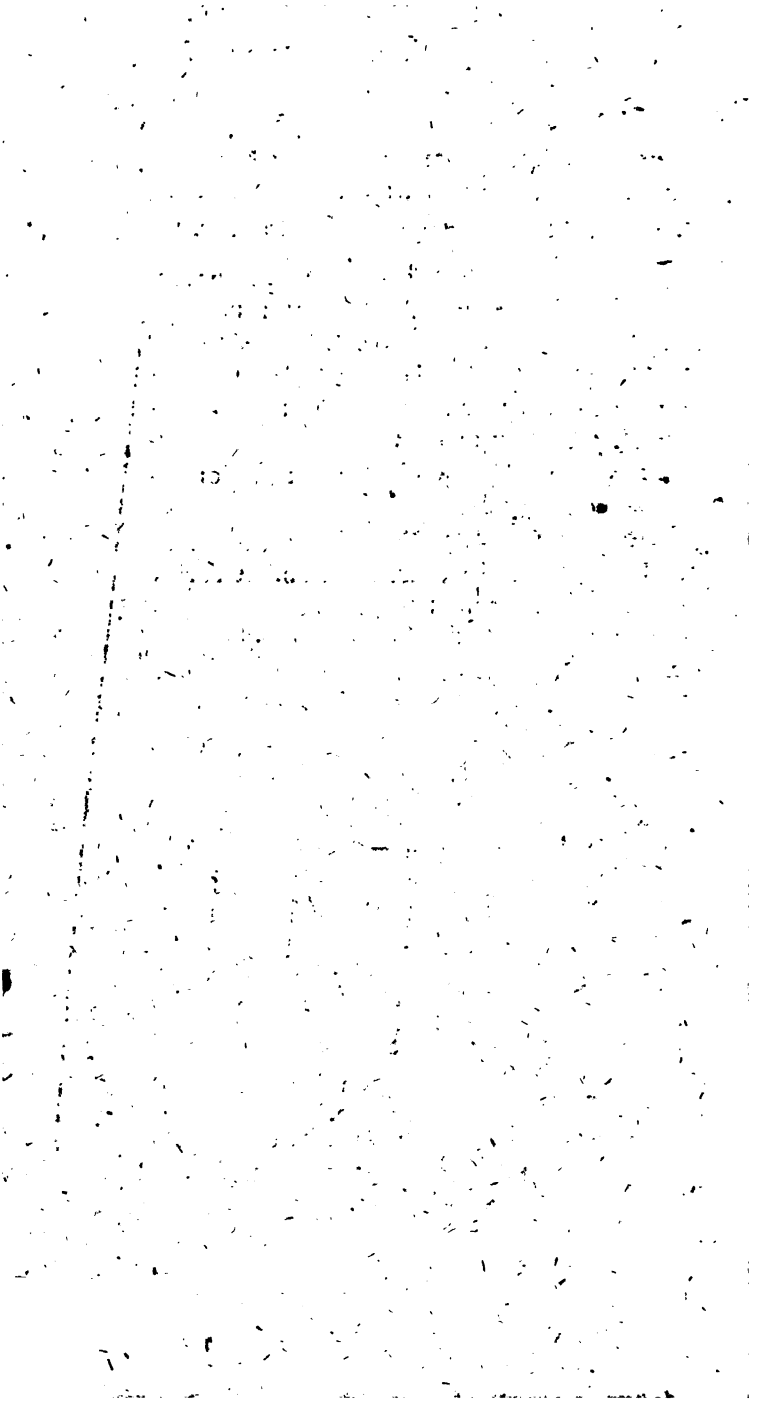
Ist $2m = 32$; so sind von p; die beyden Werthe $+6$ und -5; Der letzte aber ist hier gar nicht zu brauchen. Selbst könnte man ihn nicht in die Reihe (II) bringen, denn in dieser Reihe wird $2m - 1$ für das kleinste Glied angenommen, ein verneinter Werth von p; machte es zum gröſsten. Weil $2.(p - 1) = -12$ wenn $p = -5$; So verwandelte für $2m = 32$; die Reihe (II) sich in 31; 29; 27; 25; 23; 21; 19; Die Zahl der Glieder wäre 7, und die Summe = 50. $\frac{7}{2}$.

Indessen thut $p = -5$ der Gleichung (III) $p^2 = p - 2 - 2m$ genug, wenn $2m = +32$. Es folgt aber nicht, daſs jede Zahl, die für ein

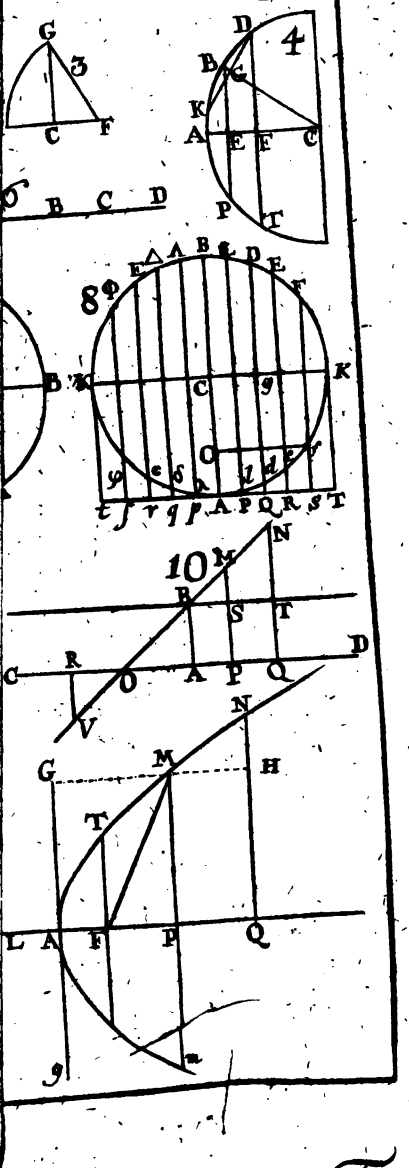
gegi-

gegebenes m der quadratischen Gleichung genug thut, auch die Wurzel eines Würfels ist, den die Summe der ungeraden Zahlen gäbe.

V) Eine Gleichung kann Wurzeln haben, die als Zahlen ihr genug thun, aber nicht zu der Frage gehören. Die Analysis giebt mehr solche Beyspiele; Als: bey der Frage von der kürzesten Dämmerung, meine III. astronomische Abhandl. 793. Bey einer Frage von der Reflexion; meine Abh. de minimo in reflexione a curvis §. 14; Dissertationes mathematicae et physicae p. 26. Bey Verzeichnung gleichlaufender krummen Linien; Meine Abh. de curvis aequidistantibus Prop. III. §. 51; 52; Commentationes Soc. R. Sc. Gottingens. ad 1791. et 92. Auch hie 754, XXI.

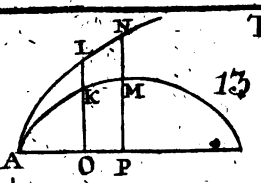


TABI

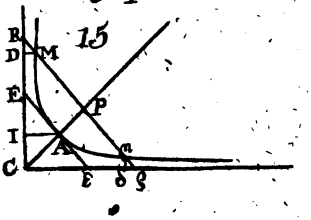

3
G
C
F
4
D
B
C
K
A
E
F
C
P
T
5
B
C
D
8
B
K
C
g
K
9
c
6
l
d
e
f
t
s
r
q
p
A
P
Q
R
S
T
10
M
N
B
S
T
C
R
O
A
P
Q
D
V
N
G
M
H
T
L
A
E
P
Q
g
m

To

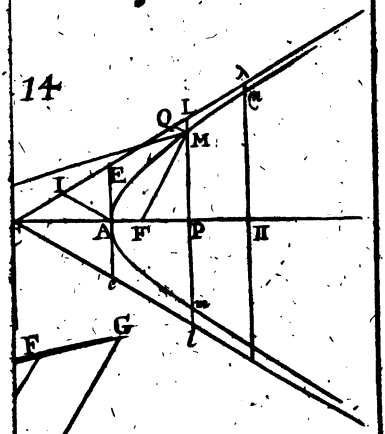
TAB II



13

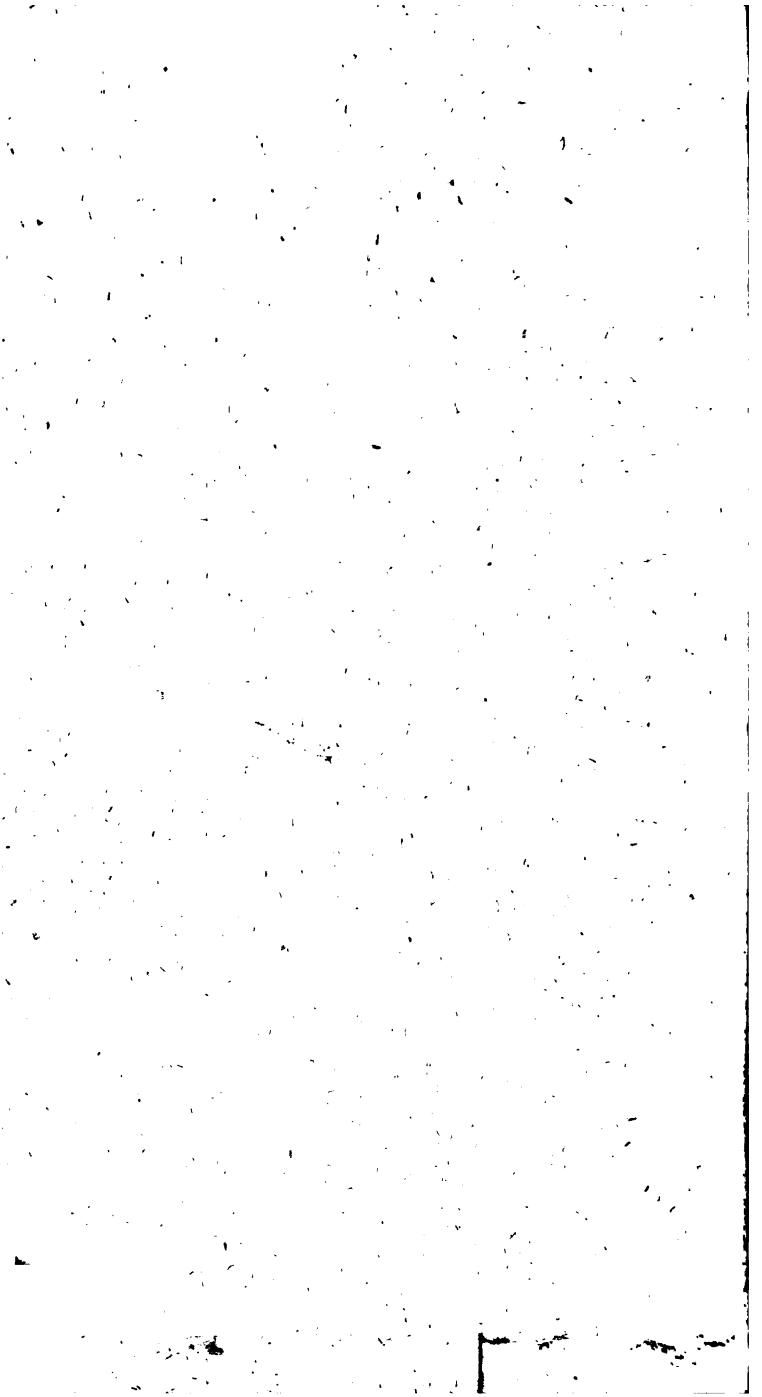


15

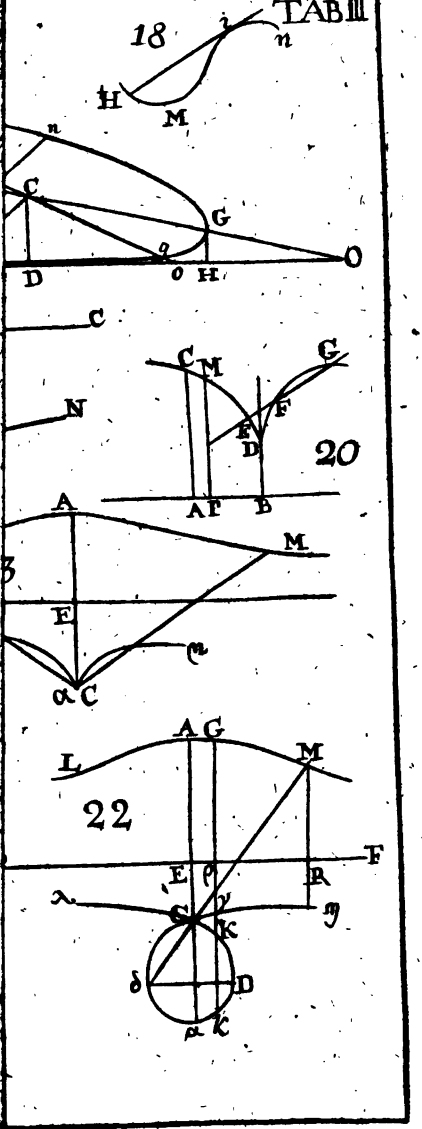


14

16



TAB III


18
i
n
H
M
n
C
G
q
D
o
H
O
C
N
C
M
G
F
E
D
20
A
F
B
A
M
E
m
C
A G
L
M
22
F
E
P
R
λ
C
K
g
δ
D
μ
k